Expertise zum Einsatz von Computeralgebra-Systemen (CAS) im Mathematikunterricht in Thüringen

Prof. Dr. Bärbel Barzel, Pädagogische Hochschule Freiburg

Unter Mitwirkung von Raja Herold und Matthias Zeller

Inhaltsverzeichnis

1) Vorwort

Medien sind „Mittler“, sie ver-*Mittel*-n beim Entdecken neuer mathematischer Begriffe und Zusammenhänge, beim Systematisieren von Erkenntnissen und beim vertiefenden Üben. Das gilt für alle Medien – ob nun klassisch-traditionell wie Körpermodell, Tafel und Kreide oder ob modern-digital in Form von Rechnern und Computern.

Immer müssen sich Medien daran messen lassen, welchen Beitrag sie zum Erwerb mathematischer Kompetenzen leisten können oder welche Bedeutung sie für den Lernprozess haben. Das gilt insbesondere beim Einsatz „Neuer Medien“. Gerade hier muss kritisch beleuchtet werden, welchen didaktischen Mehrwert Neue Medien für den Lernprozess bieten können. Weder darf die bloße Existenz von neuen Möglichkeiten ausschlaggebend für ihren Einsatz im Unterricht sein, noch sollten sie ohne sorgfältige Prüfung rundweg abgelehnt werden.

Die Diskussion um den Einsatz von Computeralgebra-Systemen (CAS) währt nun schon einige Jahre. In der Lehrerschaft gibt es Befürworter und Gegner, die Meinungen prallen aufeinander, wie sie bei anstehenden Veränderungen im Lehr- und Lernalltag häufig vorkommen. In den Lehrplänen bundesweit werden Computer-Algebra-Systeme oft erwähnt, ihre Anwendung wurde aber bisher in nur wenigen Bundesländern festgeschrieben. Diese Expertise dient der Klärung, wo, wann und wie der Einsatz von Computeralgebra-Systemen im Mathematikunterricht sinnvoll ist. Sie fasst die bisherigen Forschungsergebnisse aus nationalen und internationalen Studien zusammen und gibt auf deren Grundlage Empfehlungen.

Auch im Freistaat Thüringen finden sich Gegner und Befürworter. Thüringen gehört zu den Bundesländern, in denen sich schon früh eine Reihe engagierter Kolleginnen und Kollegen auf den Weg gemacht haben, das Potenzial eines CAS-Einsatzes im Unterricht zu erkunden. Einzelne sind bereits seit Mitte der 90-er Jahre aktiv involviert, die Möglichkeiten einer sinnvollen Integration im eigenen Unterricht auszuloten. Seit 1999 wurde CAS an acht thüringischen Gymnasien im Rahmen eines Pilotprojektes (1999-2002) eingesetzt. Aktuell arbeitet ca. ein Drittel der Gymnasien in den Jahrgängen 10 bis 12, manche bereits ab Jahrgang 9, mit einem CAS-Rechner im Mathematikunterricht.

Ein Dank an das Thüringer Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur, das diese Expertise ermöglicht hat.

Düsseldorf, 06. Januar 2011

Bärbel Barzel

2) Was ist Computeralgebra?

Die Bandbreite der für den Mathematikunterricht relevanten digitalen Medien ist groß – sie reicht von Lernumgebungen zum Erarbeiten oder Vertiefen eines spezifischen Inhalts bis hin zu umfassenden Programmen, die umfassende Möglichkeiten mehr im Sinne von Werkzeugen bieten. Zu diesen digitalen Werkzeugen gehören im Wesentlichen Computeralgebra-Systeme (CAS) neben Tabellenkalkulation (TK) und dynamischer Geometriesoftware (DGS). Tabellenkalkulation dient der Erfassung von Daten in Tabellen und Diagrammen. Geometriesoftware ermöglicht die Konstruktion geometrischer Objekte auf einem digitalen Zeichenblatt, wobei diese Objekte variabel manipuliert und gemessen werden können.

Bestimmendes Merkmal eines Computeralgebra-Systems ist die Möglichkeit des „wissenschaftlichen Rechnens", d.h. neben numerischen, approximativen Rechnungen werden vor allem exakte, algebraische und symbolische Rechnungen und die symbolische Manipulation algebraischer Ausdrücke ermöglicht. Computeralgebra ist mittlerweile ein wichtiges Teilgebiet der Mathematik mit dem Hauptziel, durch exakte Rechnung (Rundungen oder Näherungen werden nicht zugelassen) algebraische Ausdrücke umzuformen, ein möglichst kompaktes Ergebnis zu ermitteln und die verwendeten Algorithmen effizient zu gestalten. Dadurch weiten sich die Anwendungsgebiete der Computeralgebra erheblich aus (z.B. in der Physik, Chemie, Robotik, Kontrolltheorie, vgl. Informationen der DMV-Fachgruppe Computeralgebra[1]).

Auch für die Schulalgebra sind im Wesentlichen die beiden Komponenten rechnergestützte algebraische Manipulation und Exaktheit zentral (Barzel 2006a, S. 74):

- Ein CAS löst Gleichungen und Gleichungssysteme nicht nur numerisch, sondern auch algebraisch symbolisch.
- Ein CAS weist Lösungen exakt aus, sofern nicht explizit eine Näherungslösung gefordert ist. So bleibt ein Ergebnis exakt stehen und wird nicht als Näherungswert ausgegeben, z.B. $\sqrt{2}$ statt 1,414213562.

Auch wenn Pallack (2007) bedauert, dass eine eindeutige Definition von CAS wegen des nicht einheitlichen Kategoriensystems für Technologien fehlt, so nimmt er die Möglichkeit der symbolischen und algebraischen Verarbeitung als Mindestmaß an, um von einem CAS zu sprechen.

> "Ein CAS ist eine Technologie, mit der man mindestens Terme symbolisch ableiten und Gleichungen algebraisch lösen kann." (Pallack 2007a, S. 90)

Die wichtigsten Befehle im Bereich der algebraischen Manipulationen sind im schulischen Bereich (Kieran und Yerushalmy 2004, S. 135): das Erweitern (EXPAND), Faktorisieren (FACTORISE) oder das unmittelbare Lösen von Gleichungen (SOLVE). So kann CAS

[1] www.fachgruppe-computeralgebra.de, Stand: 05.01.2011

beispielsweise genutzt werden, um eine teilweise faktorisierte Gleichung zu erweitern. Umgekehrt funktioniert das allerdings nur bedingt (Kieran und Drijvers 2006, S. 240–242).

Die Bedeutung der Möglichkeit, Ergebnisse in erster Linie exakt zu erhalten, wird ebenfalls als bedeutsam für das Lernen von Mathematik angesehen (Fey et al. 2003, S. 2; Artigue 2004, S. 219). Die genaue Ergebnisausgabe kann nun die alleinige Verfügbarkeit des Näherungswertes im Unterricht ablösen und damit die Bedeutung beispielsweise von irrationalen Zahlen vertiefen.

Die meisten Forscher nehmen auch die Grafikfähigkeit bewusst als Bestandteil von CAS hinzu, was auch bei vielen gängigen Computeralgebra-Systemen realisiert ist:

> "Computer Algebra Systems (CAS) are powerful computer packages that perform calculations, offer graphical representation and also perform symbolic manipulation for algebra and calculus." (Abdullah 2007, S. 14)

Diese Integration der grafischen Darstellung und ihre Vernetzung mit der symbolisch-algebraischen Darstellung wird in vielen Studien, wie z.B. in der Meta-Studie von (Fey et al. 2003, S. 1–2), als wichtiger Aspekt beim Lernen von Algebra und Analysis hervorgehoben, um den bewussten Repräsentationswechsel verfügbar zu haben und die Wechselwirkung von symbolischen und grafischen Darstellungen bewusst zu lernen und zu erfassen (Barzel 2004, S. 60). Diese Möglichkeit wird auch als Window-Shuttle-Prinzip benannt (Heugl et al. 1998). In verschiedenen Studien (z.B. Clements und Burns 2000; Sarama et al. 1998; Noss und Hoyles 1992) wurde festgestellt, dass die Verbindung symbolischer und visueller Repräsentation die Konstruktion mathematischer Strategien und Ideen unterstützt (Clements et al. 2008, S. 142). Deshalb sollte die Möglichkeit der Grafikfähigkeit keinesfalls in einem Werkzeug für den Mathematikunterricht fehlen. Insofern sind auch aktuelle Taschenrechnerentwicklungen (z.B. FX 991ES), die das Manipulieren nur einiger weniger algebraischer Ausdrücke ermöglichen und keine Grafikfähigkeit integriert haben, keine relevanten Tools für die Schule.

Tabellenkalkulation, Geometriesoftware und Computeralgebra als die wichtigsten digitalen Werkzeuge für den Mathematikunterricht waren bis vor einigen Jahren noch getrennt als verschiedene Programme verfügbar (z.B. Excel als Tabellenkalkulation, DynaGeo als Geometriesoftware, Derive, Maple oder Mathematica als Computeralgebra-Systeme). Mittlerweile sind diese Programme immer stärker zusammen gewachsen und als vernetzte Werkzeuge miteinander verbunden. So vereint Geogebra Geometriesoftware und Tabellenkalkulation in einem Computerprogramm. Besonders weit entwickelt ist der TI-Nspire-CAS, der alle drei Programmarten miteinander verknüpft und zuzüglich noch ein Tool zur interaktiven Verarbeitung statistischer Daten integriert. Den TI-Nspire-CAS gibt es als Computerprogramm und als Taschenrechner (Handheld).

Um Klarheit in das aktuelle Angebot der digitalen Werkzeuge zu bringen, ist es hilfreich, einzelne Komponenten der Programme aufzulisten. In der folgenden Abbildung 1 werden für die derzeit gängigen Programme und Taschenrechner (in den Spalten) die jeweils verfügbaren Komponenten (in den Spalten) aufgeführt. Dabei ist auch ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) integriert, um die Unterschiede zu verdeutlichen.[2]

	Art	HH o. PC	Daten erfassen und darstellen	Geometrische Objekte konstruieren, manipulieren und messen	Graphen erzeugen	Exaktes, symbolisch Rechnen und Arbeiten	Daten interaktiv darstellen und manipulieren	Text erfassen
TI-84	GTR	HH	o		x			o
DynaGeo, Cabri II	DGS	PC		x				
Excel	TK	PC	x		o		o	o
Derive, Mathematica, Maple	CAS	PC	x			x		o
TI-Nspire Non-CAS	FP TK DGS	HH PC	x	x	x		x	x
TI-Nspire CAS	CAS TK DGS	HH PC	x	x	x	x	x	x
TI-92, V-200	CAS TK DGS	HH	x	x	x	x		x
Geogebra[3]	TK DGS	PC	x	x	x			x
Casio Class-pad 330	CAS TK DGS	HH	x	x	x	x		x

Abbildung 1: Komponenten der derzeit gängigen Programme und Taschenrechner

Die Unterschiede zwischen einem grafikfähigen Taschenrechner und einem CAS-Rechner im Detail werden in der folgenden Abbildung 2[4] noch einmal verdeutlicht:

Funktionalität (Befehl, Beispiel) in TI-Nspire	Non-CAS	CAS
Den Wert einer Variable oder einer Funktion definieren (define $f1(x) = 3x + 5$)	X	X
Gleichungen mit einer Variable numerisch lösen (solve ($3x + 5 = 7$, x))	X	X
Gleichungen mit mehreren undefinierten Variablen (solve ($3x + 5 = 7a$, x))	-	X
Algebraische Ausdrücke unter Berücksichtigung des Distributivgesetzes umformen (expand; factor)	-	X
Variablen durch Nummern oder algebraische Objekte ersetzen ($3x \mid x = 5a$)	-	X
Mathematische Ausdrücke oder Gleichungen umformen, z.B. zum schrittweisen Lösen (($3x + 5 = 4x + 6$) – $3x$)	-	X
Mit undefinierten Variablen rechnen und Ergebnisse mit Variablen zeigen ($x + 2x – 4a – 3a$)	-	X

---

2 Zur Erläuterung: X – gehört zur wesentlichen Funktionalität O – nur bedingt oder indirekt möglich
CAS: Computeralgebrasystem; GTR: Grafikfähiger Taschenrechner; DGS: Dynamische Geometriesoftware; TK: Tabellenkalkulation; FP: Funktionenplotter;
HH – als Handheld/ Taschenrechner erhältlich; PC: als PC-Programm erhältlich (Kein Emulator)

3 Die Entwickler von Geogebra haben bereits seit längerem eine CAS-Applikation für Geogebra angekündigt, die bisher jedoch noch nicht verfügbar ist. Aktuell sind nur einige wenige CAS-Befehle möglich. Es ist zu erwarten, dass diese Applikation ebenso wie die für TK ein additives Tool in der Geometrie- und Grafikoberfläche darstellt und keine eigene Oberfläche besitzt wie z.B. bei TI-Nspire-CAS.

4 Vgl. Zeller und Barzel 2010

Abbildung 2: Unterschiede der zwei TI-Nspire Versionen in der elementaren Algebra

Das Verbinden verschiedener Zugänge und Repräsentationsweisen begann mit den Taschenrechnern TI-Voyage 200 oder TI-89, jedoch nur in punktuellen Bereichen (Barzel 2006a, S. 162). Laakmann (2008) stellt heraus, dass speziell bei TI-Nspire und dem Casio ClassPad 330 der Wechsel zwischen den symbolischen, den grafischen und den numerischen Darstellungen in deutlich größerem Maße als bisher gelingt. „Änderungen in der einen Darstellung [führen] auch zu entsprechenden Veränderungen in den anderen Darstellungen“ (Laakmann 2008, S. 44). Weigand (2010) beschreibt dies kurz damit, dass die verschiedenen Komponenten interaktiv verbunden sind. Verändert man ein Objekt in einer Darstellung, wird dieses Objekt auch unmittelbar in den anderen Komponenten oder Darstellungen entsprechend verändert (Weigand und Bichler 2010, S. 697). Dadurch können die Schülerinnen und Schüler kausale Zusammenhänge zwischen verschiedenen Repräsentationen, wie Graphen, Tabellen und dynamischer Geometrie, beobachten und entdecken (Duncan 2010, S. 763). Hollebands et al. (2008) stellen heraus, dass die Bewegung zwischen den verschiedenen Darstellungen insbesondere beim mathematischen Problemlösen essentiell ist. Der bewusste Wechsel zu einer anderen Darstellung stellt eine wichtige Problemlösungsstrategie dar und bietet somit wesentlich mehr erfolgversprechende Wege zur Lösung (Hollebrands et al. 2008).

Die verknüpfte Multirepräsentationsfähigkeit ist nicht nur für Algebra sondern auch für die Geometrie von Bedeutung. Aldon (2010) erklärt, dass geometrische Objekte in einer grafischen Umgebung animiert, Maße in einer Tabelle gespeichert und schließlich Dokumente auf andere Rechner oder Computer übertragen werden können (Aldon 2010, S. 3).

Aldon (2010) stellt ein weiteres sehr hilfreiches Merkmal von CAS heraus. Er sieht das Verfassen, Speichern und Übertragen von Dokumenten als großen Vorteil von CAS-Rechnern. Aufgrund dieser Eigenschaft können Inhalte in Ordnern, auf Seiten etc. sortiert und abgelegt werden. (Aldon 2010, S. 5) Wichtig dabei sei außerdem, dass so ebenfalls die Daten verschiedener Aktivitäten, wie Tabelle, Graphen etc., gespeichert werden können. (Aldon 2010, S. 3) Damit können beispielsweise Erkenntniswege auf längere Zeit festgehalten und sogar anderen einfach übergeben werden, sei es durch das Übertragen von einem Taschenrechner zum anderen oder vom Taschenrechner auf den Computer.

Auf wirtschaftlicher Ebene muss festgehalten werden, dass bei der Entwicklung von Computeralgebra-Systemen insbesondere für den schulischen Bereich verschiedene Firmen Vorreiterrollen einnehmen. Dabei sind besonders Texas Instruments (TI) und Casio marktführend. Wie bereits in der obigen Tabelle zu sehen war, hat momentan der von TI entwickelte Nspire-CAS eine Pionierfunktion in Bezug auf die Verknüpfung der einzelnen Komponenten ebenso wie in der Schaffung weiterer Ebenen, wie Daten und Statistik. (vgl. Duncan 2010, S. 763; Barzel 2006a, S. 162–163). Wegen der Verfügbarkeit von CAS auf Taschenrechnern setzt sich in letzter Zeit die Bezeichnung „symbolic calculators (SC)“ immer mehr durch (Weigand und Bichler 2010, S. 697).

3) Die einbezogenen Quellen im Überblick

Diese Expertise basiert auf einer umfassenden, wissenschaftlichen Recherche zu den Fragen, wann, wo und wie der Einsatz von CAS im Mathematikunterricht sinnvoll ist. Bei der Recherche wurden folgende Arten von Quellen zu Rate gezogen:

- Zeitschriften, wie The International Journal on Mathematics Education (ZDM Mathematics Education), International Journal for Technology in Mathematics Education, International Journal of Computers for Mathematical Learning oder Journal für Mathematikdidaktik (JMD);
- Sammelwerke und Metastudien, wie (Fey et al. 2003) oder (Heid und Blume 2008a);
- Monographien oder Dissertationen, wie (Ingelmann 2009) oder (Bichler 2010)
- Tagungsbände, wie (Beiträge zum Mathematikunterricht 2007), (Woo 2007) oder (Hoyles und Lagrange 2010) sowie
- Artikel weiterer Veröffentlichungen.

Letztendlich wurden aus den 275 Quellen 163 zur näheren Untersuchung ausgewählt, darunter 63 Artikel, 16 Sammelbände, fünf Monographien und neun Tagungsbände. Die verbleibenden Quellen ergeben sich aus den Beiträgen der Sammelwerke, Hochschulschriften, wie Dissertationen sowie Internetdokumenten.

Die maßgeblichen Leitfragen zur Auswahl waren:

- Liegen Erkenntnisse zum Einsatz von CAS vor?
- Werden Aussagen zu Gelingensbedingungen zum Einsatz von CAS getätigt?

Zudem wurden aufgrund der Fülle an Nachweisen sowohl ein zeitlicher Filter als auch ein Filter nach Schwerpunkten gesetzt. Zeitlich wurde der Fokus auf möglichst aktuelle Publikationen gelegt, so dass bevorzugt Publikationen mit Erscheinungsjahr nach 2000 einbezogen wurden.

Bei der Auswahl nach inhaltlichen Schwerpunkten wurde besonderer Wert darauf gelegt, sich einen möglichst vielfältigen Überblick zu verschaffen, d.h. die Thematik möglichst weiträumig (sowohl thematisch, territorial als auch bezogen auf die Forschergruppen) abzudecken und so die zahlreichen Facetten des CAS-Einsatzes im Mathematikunterricht zu erfassen. Daraus ergab sich auch, dass beispielsweise von einer der momentan bedeutendsten und größten Studien, dem CAS-CAT Projekt in Australien, nur einige der zahlreichen Veröffentlichungen näher betrachtet wurden. Im Literaturverzeichnis unter Sekundärliteratur werden allerdings die zusätzlichen Artikel aufgeführt als Hinweise für eine weitere Lektüre. Bei diesem Reduktionsschritt wurde jedoch darauf geachtet, dass die wichtigsten Ergebnisse und Aspekte der jeweiligen Studie für diese Expertise im Fokus bleiben.

Die nach diesen Kriterien ausgewählten Veröffentlichungen wurden dann anhand ihrer Titelangaben und Kurzinhaltsangaben gefiltert und vorsortiert und im Weiteren gelesen sowie exzerpiert. Kernaussagen und Zitate wurden festgehalten und in einem anschließenden Schritt in diverse Forschungsfelder eingeordnet. Das Resultat diente als Basis für die Kernaussagen dieser Expertise und des sich anschließenden Schreibprozesses.

Um einen Überblick über die Art der einbezogenen Artikel und Schriftstücke zu erhalten, bietet sich eine grobe Klassifizierung in zwei verschiedene Arten an:

- **Empirische Studien**: Hierzu zählen sämtliche wissenschaftliche Studien, die ausgehend von dem Stand der Forschung und Literatur unter einer fokussierenden Forschungsfrage auf verschiedenen Wegen Daten sammeln und diese theoriegeleitet auswerten.

- **Theorie fokussierende Arbeiten**: Zu diesen Arbeiten rechnen wir Metastudien oder Literaturrecherchen hinsichtlich verschiedener Aspekte und Facetten des CAS-Einsatzes (z.B. Fey et al. 2003; Heid und Blume 2008a; Lagrange et al. 2003). Aber auch Schriften zu Theorien, die aufgrund von empirischen Erkenntnissen aufgestellt wurden, zählen dazu. Als zentrale Beispiele sind hierbei die Theorie der „instrumental genesis“ (siehe u.a. Aldon 2010; Artigue 2002; Heid 2005; Thomas et al. 2004) sowie verschiedene didaktische Konzepte, u.a. RIPA[5] oder SONG[6], zu nennen.

Diese Unterscheidung stellt nur eine grobe Klassifizierung dar und beschreibt lediglich die jeweils vorgenommene Schwerpunktsetzung in den Schriften. Es ist wichtig zu betonen, dass einerseits bei allen einbezogenen empirischen Studien bestehende Theorien als Ausgangspunkt und als Interpretationsgrundlage genutzt wurden und dass andererseits die sich auf Theorie fokussierenden Arbeiten aus den Erkenntnissen von zahlreichen empirischen Studien erwachsen.

Von allen einbezogenen Publikationen sind etwa die Hälfte sich auf Theorie fokussierende Arbeiten, etwa 30 Prozent empirische Studien und 20 Prozent lassen sich nicht eindeutig zuordnen.

Allen empirischen Studien ist gemeinsam, dass sie Modelle guten Unterrichts analysieren und versuchen, diese möglichst präzise abzugrenzen und durch empirische Untersuchungen bezüglich ihrer Wirksamkeit abzusichern bzw. Modifikationsvorschläge zu machen. Die Er-

---

[5] RIPA (Reasons, Information, Plan, Answers) ist eine didaktische Hilfestellung für Schüler, um ihre mathematischen Gedanken und Lösungswege hervorzuheben und eine gute Klassenkommunikation zu veranlassen. Ball und Stacey 2003

[6] SONG (Symbolic, Oral, Numerical, Graphical) ist ein Ansatz, der die symbolischen, verbalen, numerischen und grafischen Aspekte der Mathematik verbindet und zusätzlich oder gerade deswegen Technologie in den Unterricht integriert. Ziel ist es, sowohl mit der motivationalen Verschiedenheit von Schülern oder Studenten besser umzugehen als auch fachdidaktische Erkenntnisse vertiefend einzubinden. Challis und Gretton 2002

kenntnisse werden jeweils auf verschiedenen Wegen mit unterschiedlichen Forschungsstrategien gewonnen. Dabei lassen sich zwei prinzipielle Wege unterscheiden:

- **Von Einzelfällen ausgehende qualitative Untersuchungen:** Hier werden Erkenntnisse über den Unterricht aufgrund der Analyse einzelner Situationen gewonnen. Es werden ganze Unterrichtsstunden oder einzelne Lernende während einer Aufgabenbearbeitung aufgezeichnet (meist Video- und/ oder Audioaufnahmen mit oder ohne anschließende Transkripte) oder auch Lehrpersonen sowie Schülerinnen und Schüler interviewt. Diese Idee, dass eine einzelne Situation über sich hinausweisen und zu allgemeinen Erkenntnissen führen kann, passt zu der Erfahrung vieler Lehrerinnen und Lehrer bei der Diagnose von Schülerprodukten: Wenn ein Schüler z. B. erklärt, warum er einen bestimmten Lösungsweg eingeschlagen oder einen bestimmten Fehler gemacht hat, kann die Lehrperson Vorstellungs- oder Bearbeitungsmuster entdecken, die auch anderes Schülerverhalten bzw. ähnliche Fehler erklären können. Eine solche Diagnose ist natürlich noch keine wissenschaftliche Forschung, bei der eine möglichst hohe Objektivität angestrebt wird, um wirklich allgemeine Schlüsse ziehen zu können. In der qualitativen Forschung gibt es aber Strategien, um allgemeine Schlüsse möglichst gut abzusichern (wie z. B. Konsensfindung im Forscherteam).
- **Von einer großen Fallzahl ausgehende quantitative Untersuchungen:** Hier werden Erkenntnisse über Unterricht aufgrund einer Vielzahl untersuchter Fälle gewonnen. Dabei sollen Aussagen aufgrund einer möglichst repräsentativen Stichprobe statistisch verallgemeinert werden. Im Fokus können dabei nur quantifizierbare Aspekte stehen wie beispielsweise Testleistungen oder Ergebnisse von Fragebögen. Es lassen sich statistisch nur solche Variablen „kontrollieren“, die auch erfasst wurden. Das reduzierende, abstrahierende Vorgehen führt einerseits zur angestrebten Möglichkeit der statistischen Verallgemeinerung, wirft andererseits aber die Frage auf, inwiefern die Ergebnisse nicht durch andere Variablen (z.B. Lehrerpersönlichkeit oder Organisation des Unterrichts) entstanden sind.

Werden im Rahmen einer Studie beide Strategien, also sowohl quantitative als auch qualitative Daten erhoben und genutzt, spricht man von einem Mixed-Method-Design, was sich in der aktuellen Unterrichtsforschung immer stärker durchsetzt.

Das Design bzw. die Anlage einer Studie ist nicht nur durch die grundsätzliche Forschungsstrategie, sondern auch dadurch geprägt, ob gezielt neues Material (eine „Intervention“) getestet wird und ob ein Vergleich zwischen verschiedenen Gruppen und Zugängen einbezogen wird. Vergleichstudien bieten sich ebenfalls bei der Untersuchung des CAS-Einsatzes an, da Experimentalgruppen, die mit CAS unterrichtet werden, mit Kontrollgruppen ohne CAS verglichen werden können. Eine große Schwierigkeit dabei liegt jedoch in der Komplexität des Unterrichtsalltages, da Störvariablen auftreten können – das sind Parameter wie z.B. Lehrerpersönlichkeit oder Unterrichtsorganisation, die Einfluss auf die untersuchten Ergebnisse haben können.

Im Rahmen dieser Recherche lassen sich drei wesentliche Studiendesigns ausmachen:

1) Vergleichsstudien, d.h. Kontrollgruppen werden mit Experimentalgruppen bezüglich verschiedener Kriterien verglichen;
2) Interventionsstudien, d.h. eine Methode bzw. ein bestimmter unterrichtlicher Weg wird auf seine Effektivität oder andere Kriterien untersucht. Dies ist meist mit einem Prä-Post-Design verbunden, d.h. es werden die Ergebnisse von Vor- und Nachtests miteinander verglichen;
3) Fallstudien, d.h. es werden einzelne Situationen im Klassengeschehen mit CAS-Einsatz beobachtet, dokumentiert und untersucht.

Im Folgenden stellen wir einige Studien explizit vor, um zum einen unser Vorgehen exemplarisch darzustellen und zum anderen um einen näheren Einblick in die bedeutenden Studien der Recherche zu geben.[7]

<table>
<tr><th colspan="5">National</th></tr>
<tr><td>Projekt:</td><td colspan="4">MUKI (Mathematik zwischen Konstruktion und Instruktion)
Barzel, Universität Duisburg-Essen, Nordrhein-Westfalen</td></tr>
<tr><td>Dauer</td><td>Technologie</td><td>Studienumfang</td><td>Studiendesign und Methodologie</td><td>Weitere Literaturverweise</td></tr>
<tr><td>2 Jahre (von 2002 bis 2004)</td><td>bes. TI-92, TI-89, wenig: Derive, Maple</td><td>45 Klassen, 450 Vergleichstests, 580 ausgefüllte Fragebögen</td><td>Interventionsstudie (6 Wochen), Mixed-Method
Qualitativ: Videos, Schülerprodukte, Interviews,
Quantitativ: Vergleichstests, Fragebogen</td><td>(Barzel 2006a, 2006b, 2007)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Forschungsfragen:</td><td colspan="3">Bis zu welchem Grad ist die Lernwerkstatt passend, um gleichzeitig inhaltliche und prozessuale Ziele zu verfolgen?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ergebnisse:</td><td colspan="3">1) In einer zentralen Vergleichsklausur haben die Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe mindestens genauso gut und besser abgeschnitten wie die der Lerngruppen mit traditionellem Unterricht.
2) Die wichtigste Grundlage, kognitive Schüleraktivitäten zu ermöglichen, liegt im Gewähren der freien Arbeit und der freien Verfügbar-</td></tr>
</table>

[7] Der Überblick über die nationalen Studien beruht auf Herold und Barzel 2008.

	keit des CAS - frei in dem Sinne, dass eine ständige Beobachtung und Kontrolle durch die Lehrperson entfällt. 3) Insbesondere Lernende mit einer mittelmäßigen bis schlechten Mathematiknote auf dem letzten Zeugnis betonen die Möglichkeit des freien Gesprächs in der Gruppe als wertvoll und hilfreich für das Verstehen der Sachzusammenhänge.

National				
Projekt:	**M^3** (Modellversuch Medienintegration im Mathematikunterricht) Bichler und Weigand, Universität Würzburg, Bayern			
Dauer	**Tech-nologie**	**Studienum-fang**	**Studiendesign und Methodologie**	**Weitere Literatur-verweise**
8 Jahre (von 2003 bis 2011)	V-200, TI-Nspire CAS	26 Klassen in 11 Gymnasien	Vergleichs- und Interventionsstudie, Mixed-Method Qualitativ: Fragebogen, Test (Schwerpunkt: Beschreibung des Lösungsweges) Quantitativ: Vor- und Nachtest, Fragebögen	(Bichler 2007, 2010; Weigand und Bichler 2009; Weigand 2008)
Forschungs-fragen:	1) Gibt es hinsichtlich zentraler mathematischer Fähigkeiten Unterschiede zwischen den Modell- und den Kontrollklassen? 2) Welche neuen Möglichkeiten ergeben sich für den Unterricht? 3) Wie ändern sich Prüfungsaufgaben durch den Rechnereinsatz? 4) Wie schätzen Schülerinnen und Schüler sowie Lehrerinnen und Lehrer den Rechnereinsatz ein?			
Ergebnisse:	1) 70 % der Lehrer sind der Meinung, dass sich die Methodik des Unterrichts verändert hat. 2) 60 % der Lehrkräfte sind der Meinung, dass sich die Inhalte gegenüber dem traditionellen Unterricht nicht verändert haben, nur 40% sehen Veränderungen in ihrem Unterricht. 3) Mit der Vertrautheit des Rechners zeigt sich bei den Schülerinnen und Schülern auch ein verstärkt kalkülhafter Einsatz des Rechners. 4) Überraschend ist, dass es über ein halbes Jahr gedauert hat, bis die Vertrautheit mit dem Rechner so hergestellt ist, dass die Schülerinnen und Schüler dieses Werkzeug in Prüfungen auch nutzen. 5) Fast alle Lehrer sind der Meinung, dass sich die Chancen der Schüler verbessert haben, die Inhalte zu verstehen. 6) Die Hälfte der Lehrkräfte ist der Meinung, dass es zentral ist, dass			

	der Taschencomputer immer zur Verfügung steht.

National				
Projekt:	**CAliMERO** (Computer-Algebra im Mathematikunterricht - Entdecken, Rechnen, Organisieren) Ingelmann und Bruder, Technische Universität Darmstadt, Niedersachsen			
Dauer	**Technologie**	**Studienumfang**	**Studiendesign und Methodologie**	**Weitere Literaturverweise**
5 Jahre (von 2005 bis 2010)	V-200	29 Experimental-, 5 Kontrollklassen (insgesamt ca. 1000 SuS[8])	Vergleichs- und Interventionsstudie, Mixed-Method Qualitativ: Analyse des entwickelten Unterrichtsmaterials, Schülerprodukte, standardisierte Unterrichtsprotokolle zu jeder Stunde, Lehrer- und Schülerfragebogen Quantitativ: Vor- und Nachtest	(Ingelmann 2009; Bruder und Ingelmann 2009)
Forschungsfragen:	Welche Effekte auf Seiten der beteiligten Schüler und Lehrer sind vor dem Hintergrund der entwickelten ganzheitlichen Unterrichtskonzeption im CAS-gestützten Mathematikunterricht in Klasse 7 und 8 zu beobachten?			
Ergebnisse:	1) Die Projektschüler zeigen deutliche Leistungsentwicklungen bei den Aufgaben, die forschendes Umgehen mit Mathematik abprüfen. 2) Der CAS-Einsatz im Mathematikunterricht führte zu einem sichereren Umgang mit Objekten der Algebra und zur Verknüpfung der verschiedenen Darstellungsformen mathematischer Sachverhalte bei den Lernenden. 3) Im Bereich des Kommunizierens und Argumentierens sind deutlich bessere Leistungen gegenüber der Vergleichsgruppe erkennbar. 4) Mathematische Grundfähigkeiten können auch im technologieunterstützten Unterricht wach gehalten werden. 5) Die Lernenden der CAS-Gruppe entwickeln ein besseres Variablenverständnis. 6) Leistungsschwächere Lernende erbrachten signifikante Steigerungen nach dem Unterricht mit CAS.			

[8] SuS steht in den Tabellen als Abkürzung für Schülerinnen und Schüler, Jg für Jahrgang

National				
Projekt:	**Umfrage in Thüringen** Schmidt und Moldenhauer, Fachhochschule Schmalkalden, Thüringen			
Dauer	**Technologie**	**Studienumfang**	**Studiendesign und Methodologie**	**Weitere Literaturverweise**
von 2002 bis 2005	TI-89	insgesamt 234 ausgefüllte Fragebögen	Vergleichsstudie, Quantitativ: zwei Umfragen (2002 und 2005)	(Schmidt 2009; Schmidt et al. 2009)
Forschungsfragen:		Welche Einstellung haben Schüler bezüglich des CAS-Handhelds (TI-89)?		
Ergebnisse:		1) Schüler haben weniger Probleme mit dem TI-89 zu arbeiten und setzen ihn wesentlich öfter ein als Schülerinnen. 2) Schülerinnen und Schüler in Leistungskursen haben etwas weniger Probleme beim Arbeiten mit dem TI-89, genießen, dass sie mehr Möglichkeiten haben, ihre Ergebnisse zu überprüfen und nutzen den Rechner deutlich häufiger als Schülerinnen und Schüler in Grundkursen. 3) Je besser die Schülerinnen und Schüler in Mathematik sind, desto mehr Nutzen können sie aus dem CAS-Einsatz ziehen.		

International				
Projekt:	**Integration von CAS im Mathematikunterricht** Ng Wee Leng, Singapur			
Dauer	**Technologie**	**Studienumfang**	**Studiendesign und Methodologie**	**Weitere Literaturverweise**
Monate (Juni bis November 2002	TI-92	81 SuS (41 in Experimental-, 40 in Kontrollgruppe)	Vergleichsstudie, Quantitativ: Abschlusstests nach jeder Einheit, Umfrage	(Leng 2003)
Forschungsfragen:		1) Welche Faktoren können die Integration von CAS in das Mathematikcurriculum beeinflussen? 2) Existieren signifikante Unterschiede in den Leistungen in Mathematik zwischen Experimental- und Kontrollgruppe?		
Ergebnisse:		1) Schüler zeigten eine leicht positivere Einstellung gegenüber CAS		

	als Schülerinnen. 2) CAS ist hilfreich für Hausaufgaben und in Prüfungen. 3) Schülerinnen und Schüler würden den Rechner regelmäßiger nutzen, wenn er ihr Eigentum wäre. 4) 90% der Schülerinnen und Schüler stimmten der Aussage zu, dass CAS hilft, Konzepte besser zu verstehen.

<table>
<tr><th colspan="5">International</th></tr>
<tr><td>Projekt:</td><td colspan="4">CAS-CAT (Computer Algebra Systems in Schools – Curriculum, Assessment and Teaching)
Ball, McCrae, Asp and Stacey, University of Melbourne, Victoria, Australien</td></tr>
<tr><td>Dauer</td><td>Technologie</td><td>Studienumfang</td><td>Studiendesign und Methodologie</td><td>Weitere Literaturverweise</td></tr>
<tr><td>2 Jahre (2000-2002)</td><td>TI-89, HP40G, CASIO FX 2.0 CAS</td><td>3 Schulen, 156 Schüler der Jahrgangsstufen 11 und 12</td><td>Interventionsstudie,
Qualitativ: Schülerdokumente, Videos von Lehrerzusammenkünften, Interviews</td><td>(Ball 2004; Ball und Stacey 2004, 2005a, 2005b, 2005c)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Forschungsfragen:</td><td colspan="3">Welche Konsequenzen hat die Implementierung von CAS Rechnern auf das Curriculum, die Bewertung und das Unterrichten?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ergebnisse:</td><td colspan="3">1) CAS Schüler tendieren dazu, kürzere Lösungen aufzuschreiben.
2) CAS Schüler beginnen eine Mischung aus mathematischer Notation und Rechnersprache zu verwenden, um ihren Lösungsweg zu beschreiben.
3) Sobald Lehrpersonen die Fähigkeiten im Umgang mit dem Rechner entwickelt haben, öffnen sie sich dem Beobachten und Erfassen der Schülerprozesse.
4) Das Forscherteam unterstützte zwar die Lehrpersonen, aber die meiste Unterstützung gaben sich die Lehrpersonen untereinander.</td></tr>
</table>

International				
Projekt:	**CAS Pilot Programme** Neill und Smith, Victoria University of Wellington, Aotearoa, Neuseeland			
Dauer	**Technologie**	**Studienumfang**	**Studiendesign und Methodologie**	**Weitere Literaturverweise**
3 Jahre (von 2005 bis 2008)	ClassPad 330, the Voyager 200, HP49G Plus	22 Schulen involviert, 2 Kontrollklassen pro Schule	Vergleichsstudie, Mixed-Method Qualitativ: Interviews, zwei verschiedene Fragebögen Quantitativ: Mathematiktest	(Smith 2006; Neill 2009)
Forschungsfragen:		Hat der Einsatz von CAS einen Einfluss auf Lehrmethoden, das Schülerlernen und das mathematische Verständnis?		
Ergebnisse:		1) Es dauert 1-2 Jahre bis CAS einen signifikanten Einfluss auf die Leistungen der Schüler hat. 2) Einige Lehrer reflektieren ihren Unterricht stärker, andere adaptieren einen eher entdeckenden oder konstruktivistischen Lehransatz in ihren Unterricht. 3) Lehrer, die sich mit dem Technologieeinsatz wohl und v.a. kompetent fühlten, probierten sich eher in entdeckenden, konstruktivistischen Lehransätzen aus. 4) Traditionelle Lehrmethoden wurden in CAS-Klassen eher selten beobachtet. 5) Die Interaktionen innerhalb der CAS-Klassen waren hoch wegen Klassendiskussionen, Ergebniskontrollen und dem Austausch über Funktionalitäten des Rechners. 6) Schüler mit CAS leisteten mindestens genauso viel wie Schüler ohne CAS. 7) Das Verständnis für Algebra hat sich bei den Schülern signifikant verbessert. 8) CAS ist ein mathematisches Werkzeug, das Lernen und Verstehen fördert. Es erlaubt Forschen und Entdecken. 9) CAS erlaubt offene Fragen und Entdeckungen realer Kntexte. 10) Der Fokus mit CAS liegt auf mathematischen Konzepten anstelle von Umformungsdetails. Die Verbindung der verschiedenen Repräsentationsmöglichkeiten eröffnete alternative Wege, Probleme auszudrücken und Lösungen zu finden.		

International				
Projekt: Özgün-Koca, Ankara, Türkei				
Dauer	**Technologie**	**Studienumfang**	**Studiendesign und Methodologie**	**Weitere Literaturverweise**
ein Semester (wahrscheinlich 2004)	TI-92	27 zukünftige Lehrer, 14 Klassen	Interventionsstudie, Mixed-Method: Qualitativ: Aufzeichnungen der künftigen Lehrer, Interviews Quantitativ: Befragung der künftigen Lehrer	(Özgün-Koca 2010)
Forschungsfrage(n):	Welche Meinungen haben zukünftige Lehrer von CAS speziell in Aufgabenstellungen der Algebra?			
Ergebnisse:	1) Werdende Lehrer überdenken ihr bisheriges CAS-Konzept schnell. Sie müssen nur die Gelegenheit dazu bekommen und CAS selbst erfahren dürfen, um den Rechnern positiv gegenüberzustehen. 2) Die Teilnehmer präferierten hauptsächlich die White-Box-Methode, um Fertigkeiten bzgl. symbolischer Umformungen zu erlernen. Erst danach soll die Black-Box-Methode genutzt werden.			

International				
Projekt: Yerushalmy, University of Haifa, Israel				
Dauer	**Technologie**	**Studienumfang**	**Studiendesign und Methodologie**	**Weitere Literaturverweise**
3 Jahre (Zeitraum unbekannt)	Visual-Math	6 Schüler (von insgesamt 24 aus 2 Klassen)	Interventions- und Vergleichsstudie Qualitativ: fünf Interviews mit den Schülern	(Yerushalmy 2006)
Forschungsfrage(n):	Wie entwickelt sich der Problemlöseprozess über 3 Jahre beim Einsatz von CAS?			
Ergebnisse:	1) Weniger erfolgreiche Schüler (die unteren 25%) nutzen die Graphensoftware um einen weiteren Blick zu erlangen, Vermutungen zu			

	bestätigen und um schwierige Operationen zu bewältigen. 2) Die weniger erfolgreichen Schüler brauchten länger, um den symbolischen Formalismus einzusetzen. Die meisten Lösungsversuche dieser Schüler legten einen Schwerpunkt auf grafische und numerische Repräsentationen. 3) Der Prozess der Lösungsfindung wurde bei diesen Schülern als relativ lang empfunden. Ebenso wurden die Graphen nicht besonders häufig eingesetzt, da diese den symbolischen Formalismus und die Umformungen nicht unterstützen. 4) Die Schülerinnen und Schüler lernten Mathematik sowie mathematische Strukturen zu schätzen und verstanden einige wichtige Muster mathematischen Denkens. Diesbezüglich kamen sie den leistungsstärkeren Schülern näher und machten das, was sie machten gut – jedoch anders.

International				
Projekt: Kieran, Université du Québec à Montréal, Montreal, Kanada				
Dauer	**Technologie**	**Studienumfang**	**Studiendesign und Methodologie**	**Weitere Literaturverweise**
2 Jahre (von 2003 bis 2005)	TI-92	6 Klassen der Jahrgangsstufe 10	Vergleichs- und Interventionsstudie, Mixed-Method Qualitativ: Videos, Interviews Quantitativ: Vor- und Nachtest	(Kieran und Saldanha 2005; Kieran und Drijvers 2006; Kieran und Damboise 2007)
Forschungsfrage(n):	Profitieren Schülerinnen und Schüler, die in algebraischen Techniken und der Theorie schwach sind, von der Arbeit mit CAS? Inwieweit fördert die Interaktion zwischen Technik und Theorie das algebraische Denken der Schülerinnen und Schüler, wenn CAS mit Papier-und-Bleistift in einer Lernumgebung kombiniert wird?			
Ergebnisse:	1) Die CAS Klassen verbesserten sich wesentlich mehr sowohl in Bezug auf die Technik als auch auf die Theorie. 2) Die Papier-und-Bleistift Arbeit der Schüler verbesserte sich durch die Interaktion mit CAS.			

	3) CAS stärkte das Selbstbewusstsein der Schülerinnen und Schüler bezüglich ihrer Algebrafähigkeiten. Dieses Selbstbewusstsein stärkte ihr Interesse und ihre Motivation. 4) Die Vielfalt der Repräsentationsmöglichkeiten mit einem CAS führte die Schülerinnen und Schüler zu Reflektionen, die mit Papier-und-Bleistift wesentlich schwieriger zu erreichen gewesen wären. 5) Die Schülerinnen und Schüler strebten nach einer Kontinuität und nutzten den CAS in vielfältigen Situationen, um ihre theoretischen Gedankengänge zu überprüfen.

Anhand dieser Studien konnte nun ein Überblick über den aktuellen Stand der Forschung im Hinblick auf den Einsatz von Computeralgebra-Systemen gewonnen werden. In den verschiedenen Studien werden sowohl die Lernprozesse der Schülerinnen und Schüler als auch die Rolle der Lehrpersonen eingehend untersucht. Lediglich im Bereich der Konzeption von Unterricht und Materialien könnten die Erfahrungen und Erkenntnisse noch stärker systematisiert werden. Schwierig erscheint auch, dass es zu wenige Langzeitstudien gibt. Abgesehen von Ingelmann (2009) und Bichler (2010) sind uns keine Projekte bekannt, die einen längeren Zeitraum als 5 Jahre betrachten. Weiterhin wäre es zukünftig wünschenswert, bei solchen Studien größere Schülergruppen einzubeziehen, um die Erkenntnisse noch stärker durch statistische Verfahren abzusichern.

4) Erkenntnisse und Ergebnisse zum Einfluss von CAS im Unterricht

Die Einflüsse von CAS in allen einbezogenen Publikationen werden vielfältig reflektiert und beziehen sich vor allem auf das Wissen der Schülerinnen und Schüler sowie auf die konkrete Gestaltung des Unterrichts.

Grob klassifizieren lassen sich die Einflüsse auf das inhaltliche Wissen der Schülerinnen und Schüler nach Waits (2000):

> "Some Mathematics becomes more important because technology requires it.
>
> Some Mathematics becomes less important because technology replaces it.
>
> Some Mathematics becomes possible because technology allows it."

Während Waits (2000) in den ersten beiden Punkten auf eine Umgewichtung etablierter Inhalte eingeht, wird im dritten Punkt die Einbindung zusätzlicher mathematischer Inhalte thematisiert. Thomas et al. (2004) konkretisiert mögliche neue mathematische Themenbereiche:

> "While the availability of CAS apparently devalues the learning of rules, it offers the possibility to focus on the selection of appropriate techniques, the anticipation of general patterns, and the interpretation of results and application to real life problems." (Thomas et al. 2004, S. 157)

Damit ist eine Akzentverschiebung beschrieben, die zentral bei fast allen Ausführungen zu finden ist, nämlich die Akzentverschiebung vom Regellernen hin zur bewussten Auswahl mathematischer Verfahren, zur Mustererkennung sowie zur Interpretation von Ergebnissen und Anwendungen in realen Sachkontexten. Dies ist inhaltlich sowohl eine Umorientierung als auch ein Hinzufügen neuer Inhaltsschwerpunkte im Sinne der genannten Klassifizierung von Waits (2000). Jedoch findet die Akzentverschiebung nicht nur auf der inhaltlichen Ebene statt, sondern zieht ebenso eine neue Schwerpunktsetzung auf struktureller und methodischer Ebene nach sich.

Was mit diesen Akzentverschiebungen auf der Grundlage der einbezogenen Quellen konkret gemeint ist, lässt sich in acht zentralen Aussagen zusammenfassen:

- Konzeptuelles Wissens kann durch CAS gefördert werden. (siehe 4.1, S. 23)
- Rechnerfreie Fertigkeiten sind auch beim CAS-gestützten Unterricht zu erwerben. (siehe 4.2, S. 28)
- Die Nutzung mathematischer Sprache in der schriftlichen Kommunikation wird durch CAS angeregt (siehe 4.3, S. 29)
- Technische Fertigkeiten können fachliche Ziele sinnvoll ergänzen (siehe 4.4, S. 31)
- CAS begünstigt einen genetischen Aufbau der Unterrichtsinhalte. (siehe 4.5, S. 34)
- Die Integration offener Aufgaben in den Unterricht wird durch CAS unterstützt. (siehe 4.6, S. 37)

- CAS erhöht die Anzahl individueller Lösungswege und unterstreicht deren Zusammenhang. (siehe 4.7, S. 40)
- Lehrer- und schülerzentrierte Unterrichtsmethoden erscheinen mit CAS in einem neuem Licht. (siehe 4.8, S. 42)

Die Punkte 4.1 bis 4.4 konzentrieren sich auf Lernmöglichkeiten, die beim Umgang mit CAS entstehen. Damit sind ebenso die dabei geförderten Kompetenzen gemeint als auch die daraus entstehenden Änderungen der fachlichen Unterrichtsziele. In den Punkten 4.5 bis 4.8 werden die durch CAS möglichen Änderungen der inhaltlichen und methodischen Gestaltung des Mathematikunterrichts dargestellt.

Die Frage, ob sich die Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler, die mit CAS lernen, automatisch und grundsätzlich verbessern, kann auf Grundlage der aktuellen Forschungsergebnisse nicht pauschal beantwortet werden. Die im Folgenden differenzierte Betrachtung einzelner Aspekte lässt allerdings fundiert darauf schließen, dass sich die Schülerkompetenzen den aktuellen Forderungen der Bildungsstandards und der Fachdidaktik entsprechend verschieben. Solche Ergebnisse liefern vor allem Studien mit umfassend geplanten und vorgegebenen Interventionen (Smith 2006; Neill 2009; Leng 2003; Weigand und Bichler 2010; Barzel 2006a).

Bei deren Konzeption und Entwicklung wurde berücksichtigt, dass der Einsatz von CAS kein Selbstzweck ist. Es geht weder um eine möglichst häufige Integration noch um eine Ausschöpfung aller technischer Möglichkeiten, sondern vielmehr um eine Unterstützung der in der allgemeinen Fachdidaktik geforderten Änderungen. Die Ergebnisse von Studien ohne jegliche Intervention, d.h. der Einsatz von CAS wurde ohne eine unterrichtliche Veränderung vollzogen, zeigen nur geringe oder keine Auswirkungen auf die Schülerkompetenzen (vgl. Neumann 2010[9]). Vielmehr liefern sie meist Hinweise auf eine sich langsam entwickelnde Änderung der Unterrichtskultur (siehe auch Schmidt 2002, 2009). Dabei entstehende didaktische Ansätze können nur über einen längeren Zeitraum in der Unterrichtspraxis ausgereift werden und fordern die Entwicklung eines Kompetenzmodells für CAS-gestützten Mathematikunterricht (Weigand und Bichler 2010). Möglicherweise kann dann auf Grundlage neuer Forschungen nicht mehr nur von einer Kompetenzverschiebung sondern eher von einer Kompetenzerweiterung gesprochen werden.

Bei der Beurteilung des CAS-Einsatzes stehen zwei Aspekte in einer Wechselbeziehung: Einerseits zeigt die Forschungslage, dass die aktuell in der Fachdidaktik geforderten Änderungen von Unterrichtszielen, Inhalten und Methoden durch den CAS-Einsatz gefördert werden können. Andererseits liefern genau diese Forderungen eine wichtige Grundlage und

---

[9] Information von Robert Neumann 2010 im Rahmen eines Vortrages auf der GDM, Februar 2010 in München. Bericht über einen Vergleichstest zu mathematischen Basiskompetenzen mit ca. 1000 Studienanfängern aus Niedersachsen in Ingenieurswissenschaften und Wirtschaftswissenschaften, bei dem auch erhoben wurde, ob das Abitur in Mathematik mit oder ohne CAS geleistet wurde.

die Kriterien, damit der CAS-Einsatz sinnvoll gelingen kann. Die Änderungen werden also sowohl durch CAS-Einsatz gefördert als auch für eine gewinnbringende Integration gefordert.

4.1) Konzeptuelles Wissens kann durch CAS gefördert werden

CAS muss sich immer daran messen lassen, ob mit seinem Einsatz eine Unterstützung der Ziele des Mathematikunterrichts bewirkt wird. Diese Ziele beziehen sich generell auf drei verschiedene Arten von Wissen (Hiebert und Carpenter 1992):

- **Prozedurales Wissen** wird für das Beherrschen einfacher mathematischer Routinen (syntaktisches Arbeiten) als auch mathematisch anspruchsvoller Fähigkeiten wie Argumentieren, Problemlösen und Modellieren benötigt.
- **Konzeptuelles Wissen** basiert auf inhaltlichen Vorstellungen und ermöglicht ein Verstehen der Prozeduren, also sowohl der vollzogenen Routinen und Rechenoperationen als auch der anspruchsvollen mathematischen Prozesse (wie Argumentieren und Modellieren). Es ist Grundlage für ein tiefergehendes Fachverständnis mit einer Vernetzung von Wissen, Fertigkeiten und Fähigkeiten. Bleiben Routinen nur gekonnt, aber unverstanden, so liegt rein prozedurales und kein konzeptuelles Wissen vor.
- **Deklaratives Wissen** umfasst das mathematische Faktenwissen.

Ziel des Mathematikunterrichts muss es sein, all diese mathematischen Kompetenzen zu erwerben (Baumert et al. 2010). Die Forderung nach der Vernetzung verschiedener Wissensebenen findet sich auch in der Konzeption, die „Task-Technique-Theory" benannt wird und auf der anthropologischen Theorie von Chevallard (1999) gründet (Chevallard 1999). Diese Konzeption wird häufig als theoretischer Rahmen für Studien zum CAS-Einsatz genutzt.

Idee ist es, bei der Unterrichtsplanung ein konsistentes Gefüge aus Aufgaben, Fertigkeiten und konzeptueller Reflektion anzuregen:

> "[...] researchers emphasized that a mathematical topic should exist in school as a consistent set of tasks, techniques, and conceptual reflection." (Lagrange 2003, S. 273)[i]

Damit soll zum einen erreicht werden, dass neben dem von Regeln geleiteten syntaktischen Arbeiten auch konzeptuelles Wissen aufgebaut wird. Genau dieser Zusammenschluss von pragmatischen, syntaktischen Fertigkeiten und einem von Wissen geprägten Wert des Verstehens umfasst die einzelne „Technique" bzw. Fähigkeit. Zum anderen kommt jedoch noch die bewusste theoretische Reflexion hinzu. Es reicht nicht, allein mathematische Themen und gute Aufgaben auszuwählen, sondern es muss auch gezielt eine konzeptuelle Reflektion ausgelöst werden, um eine Verbindung der verschiedenen Wissensebenen zu erreichen.

Eine kanadische Studie zeigte explizit, dass genau diese Verbindung von regelgeleiteten Tätigkeiten mit Aktivitäten, die auf das Verstehen und Verinnerlichen mathematischer Sachverhalte abzielen, für das Lernen von Mathematik von großer Bedeutung ist (Kieran und Drijvers 2006, S. 256)[10]. Während der Zusammenhang und der gegenseitige Einfluss von Verstehen und regelgeleitetem Arbeiten individuell und vor allem je nach mathematischer Fragestellung unterschiedlich sein können (Kieran und Drijvers 2006, S. 257; Zbiek 2003, S. 206)[11], ist dennoch ein eindeutiger und empirisch fundierter Trend in der Mathematikdidaktik erkennbar: Der Erwerb von konzeptuellem Wissen soll stärker als Ziel in den Fokus gerückt werden. Die oben genannten Autoren betonen dabei, dass Lernende schneller erfolgreich regelgeleitet algebraisch umformen, wenn sie algebraisches Denken zunächst mit einem CAS-integrierten konzeptuellen Zugang über Funktionen und Modellieren erfahren (Kieran und Drijvers 2006, S. 257). Abdullah (2007) bestätigt dies und ergänzt, dass alleine der Erwerb des regelgeleiteten Arbeitens mit einer Fülle von symbolischen Umformungen von Lernenden als wenig motivierend und langweilig gesehen wird (Abdullah 2007, S. 18; Barzel 2004, S. 56)[12].

Ein Wert von CAS kann in der Zeitersparnis durch die effektive Vereinfachung von kalkülhaften und algorithmischen Operationen und in dem damit entstehenden Raum für konzeptuelle Tätigkeiten gesehen werden (Abdullah 2007, S. 18; Ingelmann 2009, S. 16)[13].

Es spielt jedoch nicht nur die gewonnene Zeit eine Rolle, sondern die Arbeit mit CAS bietet zudem gleich an mehreren Punkten Ansatzmöglichkeiten, um den Erwerb von konzeptuellem Wissen anzuregen. Durch die schnelle Verfügbarkeit von symbolischen Umformungen kann sich ohne die Unterbrechung durch syntaktische Umformungen unmittelbar nach der Eingabe eines symbolischen Objektes auf das Ergebnis konzentriert werden:

---

10 "The main finding of the study is that we clearly found evidence for the relation *theory - technique* within the setting of the designed tasks, which confirms the importance and productiveness of the TTT approach [Task-Technique-Theory]." (Kieran und Drijvers 2006, S. 256)

11 "[...] the actual relation between task, technique and theory depends on the situation." (Kieran und Drijvers 2006, S. 257)

"Students may actually learn skills faster if we, as teachers, first teach them algebraic ideas from a conceptual approach using CAS, with an emphasis on function and mathematical modeling." (Zbiek 2003, S. 206)

12 . "The procedural knowledge approach being full of symbolic manipulation was considered boring by the students." (Abdullah 2007, S. 18)

"The procedural knowledge approach has been regarded as one of the traditional methods in learning algebra." (Abdullah 2007, S. 18)

Ziel des MU sollte sein, das hinter den Kalkülfertigkeiten liegende zu verstehen. (Barzel 2004, S. 56)

13 "[...] to whatever extent routine symbolic manipulation can be successfully offloaded to CAS, the time saved can be spent on developing solid conceptual understanding." (Abdullah 2007, S. 18)

"Weigand und Weth (2002) formulieren einen daraus resultierenden Veränderungsbedarf im zukünftigen Mathematikunterricht. Zu viel Zeit nehmen ihrer Meinung nach kalkülhafte und algorithmische Operationen ein, die von dem Gerät effektiv vereinfacht werden können." (Ingelmann 2009, S. 16)

"Technique and theory emerge in mutual interaction. [...] This interaction proved to be very productive in cases of confrontation, or even that of conflict, between the techniques - particularly the CAS techniques - and the students' theoretical thinking. A tendency to reconcile CAS work and theory was observed; students seemed to strive for consistency, and used the CAS on several occasions as a means of checking their theoretical thinking." (Kieran und Drijvers 2006, S. 256).

Dabei liegen die verfolgten Ziele beim Verstehen, Nutzen und Interpretieren des Rechner-Outputs. Im CAS kann derselbe Output auf verschiedene Arten erreicht werden, was Schülerinnen und Schüler zudem vertieft mit theoretischen Gesichtspunkten konfrontiert (Kieran und Drijvers 2006, S. 235)[14].

Unabhängig davon, wie ein Output erzeugt wurde, kann eine Lernchance entstehen, wenn die tatsächliche Rechnerausgabe unerwartet oder zunächst unverständlich für die Lernenden ist:

"[...] the fact that the available CAS techniques easily provide factored and expanded forms may have contributed to the idea that common form meant simplified, basic form, which came down to factored or expanded form […]. This conflicted with the notion of common form as it was introduced in the student materials." (Kieran und Drijvers 2006, S. 236)

Eine produktive Anknüpfung und Reflektion solcher kognitiven Konflikte hilft algebraische Strukturen zu verdeutlichen. (Kieran und Drijvers 2006, S. 254) [15]

Flexibel zwischen algebraischen Ausdrücken umformen und sie mit Verstand vergleichen zu können, erfordert „Algebraic insight", d.h. eine Einsicht in die inneren Zusammenhänge der Algebra, also einen „algebraischen Blick". Dieser algebraische Blick ist eine zentrale innermathematische Kompetenz, die als Schlüsselkomponente nicht nur für die Algebra, sondern auch für alle weiteren mathematischen Themenbereiche der Schulmathematik essenziell ist. Dieser algebraische Blick ist beim Arbeiten mit CAS ausgesprochen wichtig, was empirisch bestätigt wurde:

"All of the students were adamant that use of CAS required what we call algebraic insight [...] and several commented especially on the need to be able to move fluently between different forms of algebraic expressions; a key component of algebraic insight." (Ball und Stacey 2005c, S. 128) (vgl. Ball et al. 2003, S. 16; Drijvers 2004b, S. 16)[16]

Der Einfluss von CAS auf das Ausbilden des „algebraischen Blicks" erscheint mit folgenden Betrachtungen plausibel: Um die Äquivalenz eines Inputs und Outputs (z.B. wie in

---

[14] "The combination of different CAS techniques [...] confronted the students with theoretical issues." (Kieran und Drijvers 2006, S. 235)

[15] "The confrontation of their paper-and-pencil factoring with the factors produced by the CAS was intended to encourage students to reflect upon their existing notions [...]." (Kieran und Drijvers 2006, S. 238–239)

"A second way in which CAS techniques were constitutive of theoretical advances for the students involved their noticing in a CAS output a certain structure that they had not noticed in prior examples." (Kieran und Drijvers 2006, S. 254)

[16] "The ability to recognise equivalent forms of algebraic expressions [...] has been identified as a central part of working with CAS, and one that is likely to take on new importance in future curricula." (Ball et al. 2003, S. 16)

Abbildung 3) zu erkennen, ist weit mehr nötig als rein regelgeleitetes Arbeiten. Es erfordert, flexibel Termstrukturen zu erkennen und miteinander in Beziehung zu setzen.

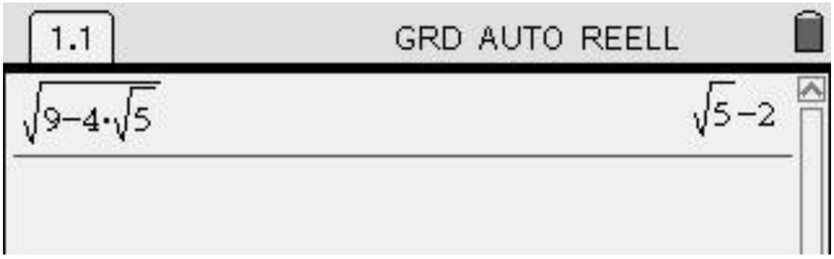

Abbildung 3: Numerischer Input ohne Befehl automatisch umgeformt

Das Erkennen von Verwandtschaften und Unterschieden zwischen verschiedenen mathematischen Ausdrücken, auch wenn sie in verschiedenen Aufgabenfeldern genutzt werden, kommt allein schon durch die geforderte symbolische Sprache des CAS zum Tragen (Drijvers 2004b)[17]. Dieselben Befehle, dieselben Eingaben und der damit erzeugte, selbe Output treten in unterschiedlichen Kontexten und den zugehörigen mathematischen Problemen immer wieder auf. Eine Matrix beispielsweise kann bei Verflechtungsproblemen und Übergangsmatrizen einen Prozess repräsentieren, im geometrischen Kontext zur Beschreibung einer Abbildung dienen oder auch zum Erzeugen von Punktfolgen genutzt werden.

Nicht nur Matrizen sondern auch andere algebraische Objekte wie Variablen, Parameter, Terme, Gleichungen, aber auch Operationen werden in verschiedenen mathematischen Themenbereichen und Aufgabenstellungen genutzt, bleiben aber bei der Eingabe im CAS ein immer gleiches Element. So werden Querverbindungen geschaffen, ähnliche Strukturen genutzt, vor allem wenn diese algebraischen Objekte unter verschiedenen Aspekten auftreten. Der wichtigste Aspekt ist beispielsweise bei einer Variablen, dass sie als Veränderliche, als Platzhalter oder als feste allgemeine Größe, mit der gerechnet wird, auftritt. Das Verankern dieser Aspekte in Grundvorstellungen ist wichtig für die Entwicklung von konzeptuellem Wissen und wird in der Mathematikdidaktik als wesentliche Grundlage eines souveränen Umgangs mit algebraischen Objekten gefordert (Hefendehl-Hebeker 2008; Malle 1993). Je nach Aufgabenstellung und mathematischer Prozedur tritt der eine oder andere Aspekt in den Vordergrund.

Am Beispiel der Variablen lässt sich dies gut erklären. Zunächst ist es in CAS oft sinnvoll, um Variablennamen zu ändern oder bereits eingegebene Terme zu nutzen, nicht nur einzelne Zahlen sondern auch algebraische Ausdrücke zu ersetzen. Dann erscheint die Variable nicht nur als Platzhalter für eine Zahl sondern auch als Platzhalter für einen symboli-

---

[17] "The CAS output, whether algebraic or graphical, invited a closer inspection of the formulas and expressions involved [...]. Entering complex formulas required insight into the algebraic structure of the formulas and expressions." (Drijvers 2004b, S. 16)

"At all stages of their work, CAS users need to recognise simple equivalences quickly and confidently, so that they are not derailed by the trivial but are alerted to the significant unexpected." (Ball et al. 2003, S. 16) schen Term (Drijvers 2003, S. 263)[18]. Eine dabei entstehende Gleichung mit mehreren Variablen kann dann als Funktion betrachtet werden. Je nachdem, welche Variablen als Funktionsvariablen und welche als Parameter genutzt werden, werden verschiedene Beziehungen ausgedrückt.

Beim Umformen oder Auflösen der Gleichung in CAS werden Variablen unter dem Aspekt des Rechenobjekts durch die Rechnung mitgezogen. Für die Parameter können in CAS verschiedene Zahlen eingesetzt werden (Variable erscheint als Platzhalter) und die Werte der „veränderlichen" Funktionsvariablen können im automatisch erstellten Koordinatensystem gleich in mehreren Graphen erscheinen (vgl. Lehmann 2002). Die Variable wird also in ganz unterschiedlichen Grundvorstellungen genutzt.

Zur Entwicklung adäquater Grundvorstellungen ist es wichtig, möglichst viele verschiedene Grundvorstellungen eines Objektes einzubeziehen und nicht isoliert zu betrachten – ob mit oder ohne CAS.

Wenn Termumformungen nur per Hand ohne Verstehen als reine Rezeptur durchgeführt werden, geht es nur um einen Aspekt: die Variable als Rechenobjekt. Mit CAS können genauso wie beim Umgang mit Gleichungen mit mehreren Variablen weitere Grundvorstellungen leichter einbezogen werden.

Bei der Arbeit mit CAS steht eine Fülle von Operationen, nach mathematischen Bereichen sortiert, zur Verfügung. Diese vorgegebene Vielfalt kann eine Bereicherung darstellen und eine zu enge Fokussierung auf Verfahren, die man bereits kennt, verhindern. Dadurch kann sich die Herangehensweise an mathematische Probleme mit CAS im Vergleich zu traditionellen Wegen verändern. Man wählt eine Operation aus der Auflistung im CAS aus, die dann ausgeschrieben und explizit erläutert auf dem Bildschirm erscheint. Besonders beim Lernen neuer symbolischer Manipulationen kann dies unterstützend auf die Entwicklung der Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern wirken (vgl. Lagrange 2003, S. 275; Zeller und Barzel 2010).

CAS kann selbst als Unterrichtsgegenstand auftreten, wobei Schülerinnen und Schüler seine Eigenheiten sowie seine Grenzen erkunden und diese in Beziehung zu manuell durchgeführten Algorithmen setzen (Kieran und Drijvers 2006, S. 221)[19].

---

[18] "On the other hand, […] the substitution of an expression in the computer algebra environment can provoke the development of its object aspect in the mental conception […] and reinforce reification." (Drijvers 2003, S. 263)

[19] "[...] some students find a challenge in exploring the 'borders' of the CAS capacities." (Kieran und Drijvers 2006, S. 221)

4.2) Rechnerfreie Fertigkeiten sind auch beim CAS-gestützten Unterricht zu erwerben

Aufgrund individueller Erfahrungen wird von Praktikern häufig folgender Vorwurf angeführt, den auch Laakmann 2008, S. 49 aufgreift: „Der Rechner übernimmt einen zu großen Teil der Lösung. Die Lernenden benötigen immer weniger (symbolische) Mathematik.“ (Laakmann 2008, S. 49) Dass diese Gefahr besteht, wird in vielen Studien entkräftet.

Ein erstes Argument zur Entkräftung der Gefahrenargumentation steckt in der Beobachtung, dass CAS unmittelbar zum Aufbau von syntaktischen Fertigkeiten beitragen kann. Dies geschieht nicht nur indirekt über die im vorigen Abschnitt (4.1) angesprochene Wechselbeziehung zwischen prozeduralem und konzeptuellem Wissen. Vielmehr kann CAS ganz direkt dabei unterstützen, syntaktische Prozeduren in ihrem Ablauf zu lernen. Regelgeleitete Arbeiten können mehr und mehr im Lernprozess teilweise an den Rechner abgegeben werden. CAS-Ergebnisse können händisch nachvollzogen sowie kontrolliert werden und umgekehrt. Der Rechner wird dann im individuellen Zusammenspiel mit manueller Arbeit genutzt. Dabei ist nicht nur das Wissen um den Umgang mit dem Gerät erforderlich sondern ebenso mathematisches Wissen.

> "There seems to be an interplay between the algebraic considerations of the students and the procedural knowledge that can be left to the technological tool. A CAS might even provoke the development of procedural skills." (Abdullah 2007, S. 15).

Die dabei entstehende Mischung von syntaktischen und technischen Fertigkeiten nennt Artique ‚instrumentales Wissen‘:

> "So they [the students] need to have built some instrumental knowledge, which is a complex mixture of technological and mathematical knowledge." (Artigue 2004, S. 219) .

Ein weiteres Argument gegen das Verdrängen rechnerfreier Tätigkeiten resultiert aus der Schwerpunktverlagerung der algebraischen Tätigkeiten:

> "[...] the presence of technology does not eliminate symbolic manipulation from algebra, but it does change it." (Kieran und Yerushalmy 2004, S. 142).

Wie im vorherigen Abschnitt (4.1) dargestellt, geht es um viele konzeptuelle Aspekte und nicht mehr nur um eine reine Kalkülorientierung. Diese konzeptuellen Aspekte können kognitiv wesentlich anspruchsvoller sein als das manuelle Abarbeiten eines Algorithmus:

> "[...] it remains true that the effective use of such tools usually requires greater mathematical understanding and concept development rather than less." (Arnold 2004, S. 18).

Neben diesen Wechselbeziehungen wird jedoch auch in vielen Studien die Bedeutung der manuellen Fertigkeiten betont und gefordert, sie bewusst zu fördern:

> "[...] CAS techniques should coexist with paper-and-pencil techniques in certain work and that classroom discussion adds a conceptual dimension to the techniques." (Lagrange 2003, S. 274–275).

Die Verfügbarkeit von CAS schließt nicht aus, dass das Gerät in bestimmten Situationen bewusst zur Seite gelegt wird:

> "CAS in hand held form allows instant access to CAS but most importantly teachers and students are aware that there are times when they must SWITCH OFF!" (Böhm et al. 2004, S. 123)
>
> Ein solcher Zeitpunkt kann zum Beispiel beim Untersuchen von vorgegebenen Strukturen oder bei ersten Schritten von offenen Problemen liegen (Goldenberg 2003, S. 18)[20].

Gewisse kalkülorientierte Fertigkeiten sollen auch manuell durchgeführt werden können, ob auf dem Papier oder im Kopf:

> "Just as we need to make people aware that physical exercise is essential for physical fitness and health, we need to make them aware that mental exercise - mental arithmetic and algebra - is essential for mental wellness and fitness." (Fey et al. 2003, S. 93)

Zum Lernen solcher Fertigkeiten wurden im Projekt CAliMERO reine Kopfrechenphasen in den Unterricht eingebunden (Ingelmann 2009). Dieser Ansatz erscheint strukturell überzeugend und seine Wirkung war bei den gemessenen Kompetenzen der untersuchten Schülerinnen und Schülern deutlich sichtbar. Allerdings könnte er im Sinne einer umfassenden Sicherung von rechnerfreien Basiskompetenzen weiter ausgebaut werden. Kopfmathematik und rechnerfreie Fertigkeiten dürfen nicht nur auf die arithmetischen Basiskompetenzen beschränkt bleiben, sondern müssen auch auf andere mathematischen Themenbereiche (z.B. Funktionen, Algebra, Geometrie) ausgeweitet werden. Dazu stellen (Pinkernell und Streit 2011) und (Weber 2010) systematische Kopfmathematik und Vorstellungsübungen vor.

4.3) Die Nutzung mathematischer Sprache in der schriftlichen Kommunikation wird durch CAS angeregt

Kommunizieren in schriftlicher Form findet im Mathematikunterricht als Erstellen und als Lesen von Dokumenten statt. Dies geschieht zum einen auf dem Papier, zum anderen im Rechner oder in einem Dokument, das Papier- und Rechnerdarstellungen verbindet. Durch die eigene Rechnersprache eines CAS wird verursacht, dass das schriftliche Kommunizieren auf eine neue Ebene gehoben wird und reflektiert werden muss. In CAS werden symbolische Formelsprachen verwendet, von denen der traditionellen Mathematik teilweise abweicht. In verschiedenen Schritten des Arbeitsprozesses müssen Ausdrücke von der einen in die andere Sprache übersetzt werden. Bei diesen Übersetzungsprozessen ist oft konzeptuelles Wissen nötig (vgl. Greefrath 2007, S. 58).

Ein Schülerdokument erfüllt zwei Funktionen: Zum einen hat es individuelle Bedeutung und zum anderen eine soziale Bedeutung, denn Schreiben dient auch der Kommunikation. Die individuelle Bedeutung besteht darin, während des Lösungsprozesses das eigene Kurzzeitgedächtnis zu vergrößern und das eigene Lernen damit zu unterstützen (Ball und Stacey

[20] "The symbolic calculator can help perform the manipulations, but even that aid is of little value unless they have figured out how to formulate the problem clearly and know which patterns to seek, an understanding that comes from studying the structures itself." (Goldenberg 2003, S. 18)

2003, S. 290)[21] oder später den Lösungsprozess nachvollziehen zu können. In der individuellen Bedeutung muss das Geschriebene nur vom Schüler oder der Schülerin selbst wiedererkannt werden, es kann daher uneinheitliche und selbst entwickelte Notationen beinhalten. Dazu sind also keine Richtlinien oder Vereinbarungen zur Notation erforderlich. Dies ist anders bei der sozialen Funktion des Schreibens. Der Nutzen von Dokumenten liegt dabei darin, die Kommunikation mathematischer Sachverhalte zu unterstützen:

> "The second purpose of a written record is to communicate how a problem has been solved. The written record should give another person, or the same writer at a later time, enough information to replicate the solution to verify its correctness, learn how to solve similar problems, or use the record for assessment purposes." (Ball und Stacey 2003, S. 290).

Das Dokument muss dann nicht nur für den Autor, sondern auch für einen anderen Leser verständlich sein. Deswegen macht es Sinn, sich auf Richtlinien bezüglich der Notation zu einigen. Dies gilt erst recht, wenn das Schriftstück für eine größere Öffentlichkeit gedacht ist oder wenn allgemeine mathematikhaltige Texte gelesen werden müssen.

Die traditionelle Sprache der Mathematik kann als lang entwickeltes Kulturgut angesehen werden und soll weiterhin von den Schülerinnen und Schülern gelernt werden. Sie ist für das Verstehen mathematischer Texte unerlässlich und sollte vorerst weiterhin zur Kommunikation genutzt werden:

> "Yet, for the moment, we believe that standard written mathematics should be preferred." (Ball und Stacey 2003, S. 296).

Bedienbarkeit und Darstellung im Rechner erfordern produktspezifische Formelsprachen, welche sich teils von jener der konsolidierten Mathematik und ihren Konventionen unterscheiden. Mit vorgefertigten Bausteinen in CAS wird versucht, die übliche traditionelle Sprache zu adaptieren, dennoch bestehen je nach Fabrikat Unterschiede. Die zukünftige Entwicklung wird absehbar durch eine Angleichung der Rechnersprache an die mathematische Notation bestimmt. So lange es der Mathematik selbst nicht abträglich ist, können sogar einzelne Elemente der Rechnersprache in die klassische Sprache der Mathematik übernommen werden. Die Rechnersprache ist sowohl bei der Eingabe als auch bei der Interpretation der Ausgabe von großer Bedeutung. Das heißt, sie muss auch gelernt werden. Vor allem wenn neue Operationen und Ausdrücke verwendet werden, kann sie undurchsichtig wirken: „[...] we should be aware that talking in the language of the software could be problematic, especially for students just beginning algebra.“ (Zehavi und Mann 2003, S. 189). Dass sie allerdings nicht nur zusätzlicher Ballast ist, sondern auch Lernmöglichkeiten bieten kann, wird bei der Übersetzung des Rechner-Outputs in die traditionelle Sprache deutlich. Die dazu benötigten algebraischen Umformungen bekommen einen weiteren Sinn: Sie sind nötig um das Ergebnis

[21] "The first purpose of a written record is to extend the capacity of short-term memory. As students work through mathematical problems, they may need to jot down information to use later in the solution - paper is a wonderful 'technology' for achieving this goal." (Ball und Stacey 2003, S. 290)

den traditionellen Richtlinien anzupassen (Ball et al. 2003, S. 16)[22]. Zudem betont die Rechnersprache einzelne Aspekte von algebraischen Objekten deutlicher. Beim Lösen einer Gleichung beispielsweise muss im Rechner explizit dargestellt werden nach welcher Variable gelöst werden soll – dies wird in der traditionellen Notation nicht erwähnt (Ball et al. 2003, S. 21)[23]. Zum Lernen beider Sprachen kann ihr Bezug thematisiert werden, was zudem hilft, Unterschiede zwischen ihnen zu erkennen (Ball und Stacey 2005b, S. 119, Heid 2003, S. 44)[24]. Die in einem solchen Lernprozess entstehenden Lösungen müssen von den Schülerinnen und Schülern dokumentiert werden.

4.4) Technische Fertigkeiten können fachliche Ziele sinnvoll ergänzen

Viele Studien haben bestätigt, dass es notwendig ist, den Umgang mit Technologie gezielt zu erlernen. Manche Aspekte der CAS-Bedienung stehen in Zusammenhang mit mathematischen Tätigkeiten, so beispielsweise Übersetzungen zwischen Rechnersprache und traditioneller mathematischer Sprache oder das Auswählen von Befehlen. Die rein technische Bedienung dagegen, der reflektierte Einsatz von Technologie und eine individuelle Arbeitsweise lassen sich hingegen eher als Beitrag zu einer allgemeinen Medienkompetenz verstehen. Der Erwerb einer allgemeinen Medienkompetenz ist wichtig, auch damit die rein technische Bedienung von CAS zur einer selbstverständlichen Nebensache wird und der Schwerpunkt auf Mathematik gelegt werden kann (Lagrange 2003, S. 282)[25]. Um dies jedoch zu ermöglichen, muss den beobachteten Problemen bei der technischen Bedienung in Interventions- und Feldstudien im Umgang mit CAS Aufmerksamkeit geschenkt werden (Bossé und Nandakumar 2004, S. 301–302; Leng 2003, S. 247)[26].

---

22 "[...] students need to be able to convert output into a standard form since CAS does not always present results in the manner which is conventional in a given educational setting." (Ball et al. 2003, S. 16)

23 "Targeting items to known CAS peculiarities may be useful e.g. changing the notation of the hand-written vinculum for division to the one line calculator format using a division sign or negative power." (Ball et al. 2003, S. 21)

24 "Here we see that some students were unsure of what was standard mathematical language and what was a specific CAS word right until the examination." (Ball und Stacey 2005b, S. 119)

"Although CAS programs may provide templates for the form of the input, a student who uses the templates may first be required to understand the meaning of the component mathematical entities [...]." (Heid 2003, S. 44)

25 "Situations with a goal of using CAS efficiently [...] are more difficult to integrate into a curriculum because they seem directed toward the instrument rather than toward mathematics. However, not teaching these techniques increases obstacles in students' use of CAS." (Lagrange 2003, S. 282)

26 "[...] students are often unable to type an expression onto the screen without the Computer Algebra Systems (CAS) performing automatic functions." (Bossé und Nandakumar 2004, S. 301–302);

Versteckte Befehle, deren Formulierungen und Anforderungen an die Eingabe, sowie undurchsichtige Menüstrukturen oder unkonkrete Fehlermeldungen können eine flexible Nutzung des Rechners beeinträchtigen (Ball 2004, S. 28)[27]. Schülerinnen und Schüler berichten, dass sie die umfassenden Möglichkeiten von CAS zwar erkennen, es ihnen aber schwer fällt die Bedienung ohne Unterstützung der Lehrperson zu lernen (Lagrange 2003, S. 271; Leng 2003, S. 246)[28]. Weiter beklagen sie, dass solche Probleme zu wenig im Unterricht thematisiert werden und wünschen sich explizit, dass mehr auf die Bedienung eingegangen werden sollte (Weigand 2006, S. 100–101). Die rein technischen Aspekte der CAS-Nutzung stellen tatsächlich einen zusätzlichen Unterrichtsinhalt dar, welcher nicht notwendig in direktem Bezug zu mathematischen Tätigkeiten steht (Lagrange 2003, S. 282)[29]. Um die CAS-Bedienung im Unterricht stärker zu betonen, werden in der didaktischen Literatur verschiedene Ansätze vorgeschlagen. So kann in Aufgabenstellungen Bezug zum Einsatz des Rechners und einzelnen Befehlen genommen werden. Bei offenen Aufgaben muss dabei allerdings beachtet werden, dass die Wahl des Lösungsweges nicht beeinflusst oder gar vorbestimmt wird. Lagrange (2003) weist darauf hin, dass die Rechnerbedienung besonders in Reflektionsphasen zu einem anregenden Diskussionsgegenstand werden kann[30]. Die Nutzung der von den Herstellern angebotenen Anleitungen, wie Hilfen direkt in den Programmen, zusätzliche Software (auch für Handhelds) oder auch Bedienungshefte, können auch für den außerunterrichtlichen Einsatz wichtig sein und angeboten werden (Ball und Stacey 2005c, S. 127)[31].

"[...] previous studies (e.g. Drijvers, 2000) [...] report students' difficulty in learning to use a CAS calculator, particularly without previous experience with graphing calculators." (Leng 2003, S. 247)

27 "One challenge in the project was having three different brands of CAS calculator as support material to help teachers and students learn syntax had to be tailored to each brand of CAS." (Ball 2004, S. 28)

28 "[...] techniques specific to the use of symbolic computation are necessary and useful, [...] these techniques are not obvious to students, and [...] these techniques may be a topic for reflection." (Lagrange 2003, S. 271)

"Though only 16 (39.0%) of the students agreed or strongly agreed that the TI-92 was easy to use, and only 23 (56.1%) of them agreed or strongly agreed that they enjoy using the TI-92, 32 (78.0%) of the students agreed or strongly agreed that they could learn to use the TI-92 on their own and that 35 (85.4%) of the students agreed or strongly agreed that TI-92 syntax was easy to understand and remember." (Leng 2003, S. 246)

29 "Situations with a goal of using CAS efficiently [...] are more difficult to integrate into a curriculum because they seem directed toward the instrument rather than toward mathematics. However, not teaching these techniques increases obstacles in students' use of CAS." (Lagrange 2003, S. 282)

30 "[...] techniques specific to the use of symbolic computation are necessary and useful, [...] these techniques are not obvious to students, and [...] these techniques may be a topic for reflection." (Lagrange 2003, S. 271)

31 - "teacher [...] advised students on programs available to download onto calculators."

- "one student in [...] class found downloadable programs for the CAS and became the CAS expert in the class [...]."
- learning "to use CAS through the teacher demonstrating procedures using the overhead projector [...]."
- "[...] CAS advice provided by the research team in a booklet provided to students and teachers." (Ball und Stacey 2005c, S. 127)

Im Gegensatz zu den Problemen bei der technischen Bedienung des Rechners stehen die Schwierigkeiten beim Verwenden und Interpretieren der mathematischen Rechnersprache oft in direktem Bezug zu mathematischen Inhalten (vgl. 4.3). Hier lassen sich die Fertigkeiten beim Umgang mit dem Rechner und die mathematischen Kompetenzen nicht exakt trennen. Daher ist es sinnvoll, sie gemeinsam als „instrumentales Wissen" zu beschreiben (Artigue 2004, S. 219). Der Erwerb solchen Wissens wird im Modell der „instrumentalen Genese" dargestellt (Drijvers und Trouche 2008). Unbekannte Objekte, wie ein Medium, einzelne Anwendungen und deren Befehle oder eine mathematische Regel, erscheinen zunächst als Artefakt. Von der Art einer Aufgabe und den bereits vorhandenen mentalen Schemata beeinflusst, wird das Artefakt in einem Prozess zum Instrument. Beim Lösen der Aufgabe kann dieses Instrument sehr unterschiedlich genutzt werden, dadurch läuft der Prozess der Instrumentation sehr individuell ab (Heid 2005, S. 348)[32]. Das Medium kann die Gedanken des Nutzers leiten: Beim Modellieren mit CAS beispielsweise wird die Repräsentation in einem groben Rahmen aus den Vorschlägen des Mediums (den einzelnen Anwendungen) ausgewählt und nicht selbst entwickelt. Umgekehrt entwickelt der Nutzer eines CAS eine persönliche Art und Weise, das Medium zu gebrauchen, die seinen Anforderungen entspricht.

Drijvers arbeitet empirisch Bedingungen heraus, welche die instrumentale Genese fördern:

> "Conditions that fostered the instrumentation of computer algebra were the congruence between CAS technique, mental conception and paper-and-pencil technique […]." (Drijvers 2004b, S. 19)

Papier und Stift sollen demnach als zusätzliches Instrument in die Arbeitsweise integriert werden. Wenn es gelingt die Beziehung zwischen den erforderten Papier-und-Stift-Fertigkeiten und der Nutzung von CAS zu erkennen (Kieran und Drijvers 2006, S. 205)[33], so können sich beide Medien ergänzen: CAS bietet beispielsweise schnelle Verfügbarkeit von Umformungen; Papier und Stift ermöglichen schnelles Festhalten von Gedanken (Ball und Stacey 2003, S. 290)[34]. Als Kriterium für die Wahl des Mediums kann die Effizienz des Lösungsweges stehen. Die eigenen Fähigkeiten und die des CAS einzuschätzen sowie in einem optimalen Aufwand-Nutzen-Verhältnis einzusetzen, wird damit stärker als Inhalt betont als im rechnerfreien Mathematikunterricht. Dies kann gezielt in Aufgaben angeregt werden:

> "[…] do it in the quickest or most efficient way possible. If that's the calculator, then use the calcula-

- in another study: "[...] most learning about calculators occurred outside the classroom rather than through teacher instruction." (Ball und Stacey 2005c, S. 127)

[32] As the student develops facility with, and an understanding of, the capabilities of the technology, the technology becomes an instrument that the student can tailor flexibly to specific needs. This development of a working relationship between the user and the tool is call *instrumental genesis*." (Heid 2005, S. 348)

[33] "From the students' perspective, it is often not clear how the use of technological tools relates to the required paper-and-pencil skills." (Kieran und Drijvers 2006, S. 205)

[34] "The first purpose of a written record is to extend the capacity of short-term memory. As students work through mathematical problems, they may need to jot down information to use later in the solution - paper is a wonderful 'technology' for achieving this goal." (Ball und Stacey 2003, S. 290)

tor, and if it's not the calculator, then don't use it." (Ball und Stacey 2005a, S. 6)

Die Wahl von Medien muss Schülerinnen und Schülern natürlich frei stehen. Medien sollen als eigenes Werkzeug zur Bearbeitung einer Aufgabe genutzt werden. Dazu ist es wichtig, dass ein Medium bei möglichst vielen Tätigkeiten genutzt werden kann. CAS erfüllt diese Bedingung wesentlich stärker als Programme, die nur einzelne Bausteine zur Verfügung stellen. Im Gegensatz zur Integration von CAS als Werkzeug steht eine Einbindung von Medien als Lernumgebungen. Dabei entscheidet der Lehrer, bei welchen Aufgaben ein Medium, wie eingesetzt wird, sei es mit Vorschriften in der Aufgabenstellung oder mit vorgefertigten Dateien (vgl. Barzel 2004). Das Lernziel ist deutlich vorbestimmt und der Lerner folgt einem vorgegebenen, nicht individuell gewählten Weg.

4.5) CAS begünstigt einen genetischen Aufbau der Unterrichtsinhalte

Eine australische Studie einer Forschergruppe um Kaye Stacey an der University of Melbourne hat einen hohen Zusammenhang ermittelt zwischen der Strukturierung des Unterrichts und der Art des Einsatzes von CAS. Als zwei wesentliche Grundstrukturen von Unterricht lassen sich ein fachsystematischer Aufbau und der Aufbau nach dem Prinzip des genetischen Lernens unterscheiden. Beim fachsystematischen Vorgehen wird der Lernstoff in seiner fachlich systematischen Hierarchie dargeboten, was oft eine instruktive Vermittlung des Lernstoffes, in kleine Einheiten untergliedert, bedingt. Komplexe Anwendungsprobleme beispielsweise stehen dabei erst am Ende einer Einheit, wenn die benötigten Techniken und Inhalte bereits gelernt wurden. CAS unterstützt diesen Weg beim Erlernen der syntaktischen Fertigkeiten und später durch die Übernahme dieser Fertigkeiten und die damit verbundene Zeitersparnis. Beim genetischen Lernen werden mathematische Begriffe und Umformungen selbst entwickelt, ausgelöst durch realitätsbezogene und Problemlösungsaufgaben zu Beginn der Unterrichtseinheit. CAS wird dabei stärker zur Entwicklung des konzeptuellen Denkens eingesetzt und findet im gesamten Lernprozess einen Platz.

Für beide Unterrichtsaufbauten kann ein Überblick über die Fachsystematik zur Gliederung der Inhalte genutzt werden. Beim genetischen Lernen werden die einzelnen Einheiten dieser Struktur parallel entwickelt und immer weiter vertieft. Beim systematischen Lernen wird die Struktur Einheit für Einheit abgearbeitet. Für die elementare Analysis entsteht dabei zum Beispiel folgendes Gerüst (Abbildung 4).

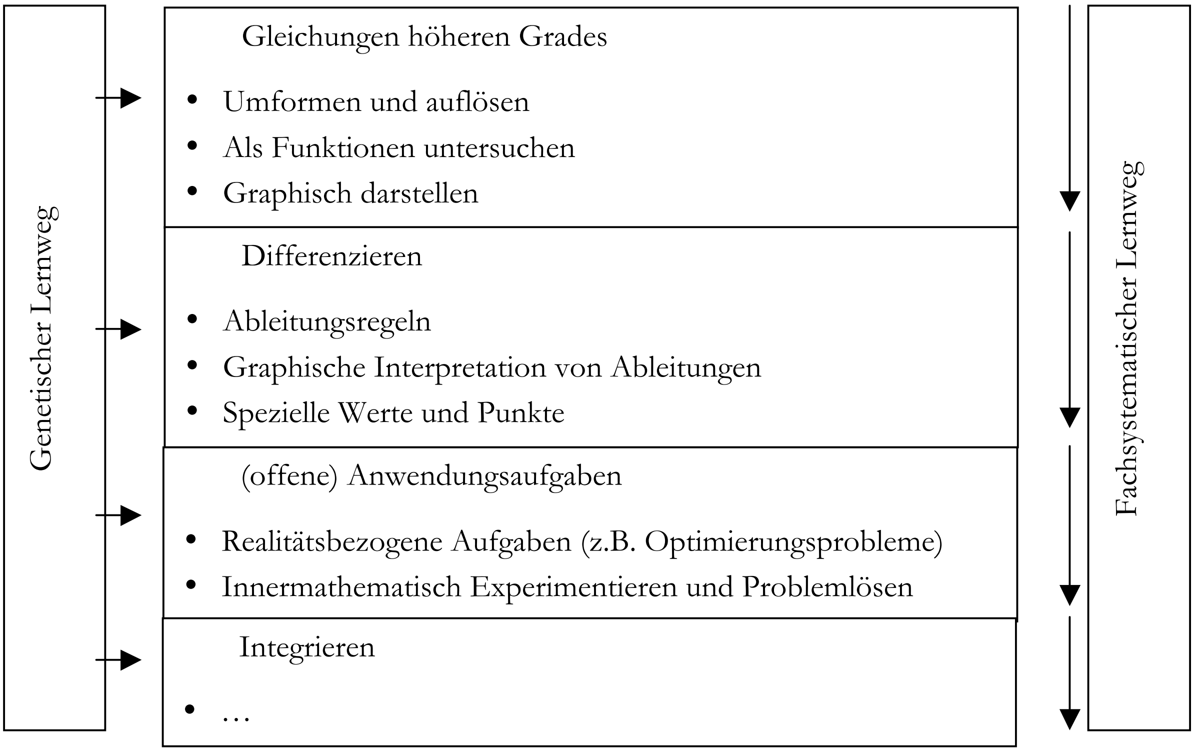

Abbildung 5: Mögliches fachsystematisches Gerüst elementarer Analysis und Lernwege

In traditionellen didaktischen Ansätzen werden diese Einheiten oft in noch kleinere Bereiche zerlegt, welche dann sukzessive, dem fachsystematischen Gerüst folgend, vermittelt werden (in Abbildung 5 mit den lotrechten Pfeilen dargestellt). Zu einer solchen Unterrichtsstruktur passt das White-Box-Black-Box-Prinzip, nach dem der Einsatz eines CAS erst „verdient“ werden muss. Der Begriff Box bezieht sich dabei auf einen mathematischen Inhalt (vgl. Heugl et al. 1998) und nicht, wie oft verwirrend in diesem Zusammenhang gebraucht, auf den Rechner. Erst wenn ein mathematischer Prozess transparent (white) ist, darf man ihn automatisch vollzogen (black), nutzen. Kendal (2001) beobachtete, dass Lehrpersonen, die auf Regellernen und manuelles Durchführen syntaktischer Prozesse Wert legen, meist dem systematischen Aufbau folgen. Sie setzen CAS am Anfang einer Unterrichtseinheit wenig ein und gestatten die Nutzung mehr und mehr – sie arbeiten sozusagen im Verlauf einer Unterrichtseinheit zu CAS hin.[35]. Charakteristisch ist dabei die Überzeugung der Lehrperson, erst wenn manuelle Tätigkeiten routiniert ausgeführt werden können, dürfen sie von CAS übernommen werden (Ball und Stacey 2005c, S. 122; Kendal und Stacey 2001, S. 158)[36]. Der Wert

[35] The teacher who stressed understanding moved away from using CAS, whilst the teacher who stressed rules, adopted it more." (Kendal und Stacey 2001, S. 143)

[36] "[...] in interviews some students suggested a preference to first perform procedures by-hand when learning mathematics in order to understand how the calculator might be performing algorithms." (Ball und Stacey 2005c, S. 122)

"Teacher B believed that symbolic routines carried out in a 'black box' did not assist understanding and insisted that [...] students perform algebraic procedures by-hand." (Kendal und Stacey 2001, S. 158) von CAS liegt hier nur in der Zeitersparnis im fortgeschrittenen Lernprozess und nicht in der Anregung von kognitiven Tätigkeiten (Ball und Stacey 2005a, S. 6)[37].

In starkem Kontrast dazu steht ein genetischer Ansatz, bei dem CAS in einem Black-Box-White-Box-Prinzip eingebunden wird. Syntaktische Arbeiten werden zunächst automatisch durchgeführt und genutzt. Im Anschluss werden beispielsweise die automatischen Umformungen untersucht. Dabei können manuelle Fertigkeiten nach und nach vom Rechner auf das Papier verlagert werden. Für die Lernenden entsteht die Möglichkeit, ein mathematisches Konzept eigenständig nach zu erfinden und zu entwickeln. Dabei wird von Aufgaben ausgegangen, deren Lösung zu neuen mathematischen Ideen führt. Die weitgehend selbstständige Genese eines mathematischen Begriffes bewirkt ein nachhaltiges Wissen (Wagenschein 1977; Freudenthal 1973). Die Frage nach dem Sinn, beispielsweise einer neuen Ableitungsregel, wird beantwortet, bevor sie überhaupt gestellt werden kann: „Die Regel ist notwendig, weil wir sie gerade zur Lösung eines Problems benötigt haben“. Zudem kann dieser Zugang gleich zu Beginn eines Lernprozesses, ungestört von syntaktischen Arbeiten einen Überblick über den gesamten inhaltlichen Bereich bieten (dargestellt mit den waagrechten Pfeilen in Abbildung 5):

> "We, who frequently champion the use of technology, point out that it can help students think the 'big' thoughts before they have learned the language; the traditional language of the algebraic machinery, among other factors, leaves them apparently unable to function mathematically." (Goldenberg 2003, S. 24)

Bei vielen individuellen Lösungen eines konkreten Problems werden zahlreiche Aspekte angesprochen, Techniken genutzt, aber erst an späterer Stelle im Lernprozess vertieft und verallgemeinert:

> "With technology, students can solve quadratic equations using technological factoring commands before they learn to factor those polynomials by hand, and they can find approximate solutions to quadratic equations in the absence of the quadratic formula by producing calculator-generated graphs." (Heid 2005, S. 347)

> „We do not insist on the attitude that you must be fluent in a technique before you apply it.“ (Challis und Gretton 2002, S. 156)

> "Introductory algebra students can [...] learn to use and interpret the results of symbolic manipulation in their reasoning and problem solving without having learned to perform those symbolic manipulation procedures by hand." (Heid und Blume 2008b, S. 92).

Diesen Aussagen und Erkenntnissen zufolge kann CAS in hohem Maße den genetischen Zugang unterstützen. Die Integration von CAS steht am Anfang des Lernprozesses und der Erwerb syntaktischer Fertigkeiten mit Papier und Stift erfolgt an späterer Stelle, auch wenn das vielen Lehrpersonen, die einen fachsystematischen Unterrichtsaufbau gewohnt sind, zunächst widerstrebt:

[37] "[…] she followed what is called a ‘white box-black box’ approach, teaching new procedures first by pencil and paper and then later with technology." (Ball und Stacey 2005a, S. 6)

"Many teachers insist that students learn to do algebraic work with paper-and-pencil first and only later use CAS – and then simply to verify the paper-and-pencil work. However, we found that the students' paper-and-pencil technical work actually benefited from the interaction with CAS. The CAS provided insights that transferred to their paper-and-pencil algebraic work and enhanced their learning." (Kieran und Damboise 2007, S. 111)

Schon bei der ersten Berührung mit einem mathematischen Bereich können unbekannte symbolische Umformungen ausprobiert und ihre Wirkungen beobachtet werden. Dies kann eine umfangreiche Reorganisation der Inhalte zur Folge haben, denn:

"Gerade durch den Einsatz eines CAS können fundamentale Fragen und Prinzipien der Mathematik wieder schärfer gesehen und unterrichtet werden. Die Inhalte werden von künstlichen, schulischen Einschränkungen befreit und so erneuert." (Heuß 2006, S. 50)

CAS erscheint bei diesem Ansatz zunächst als „black-box", was bedeutet, dass es verwendet wird, ohne dass die dahinterliegende Mathematik des automatisch durchgeführten Befehls bereits transparent ist. Wenn sie allerdings im fortschreitenden Lernprozess verinnerlicht wird, so wird CAS nach und nach durchsichtig und zur ‚white-box' (Ball und Stacey 2005a; Heid und Blume 2008b; McCallum 2003; Özgün-Koca 2010).

Im Gegensatz zu traditionellen didaktischen Ansätzen führt dieser Weg in einem mathematischen Prozess zur Fachsystematik hin. Sie wird nach und nach erarbeitet und nicht bereits zu Beginn als fertiges Produkt dargestellt. Im black-box-white-box-Ansatz gleicht die Arbeitsweise der Schülerinnen und Schüler der Arbeitsweise der Naturwissenschaften. Phänomene, wie Funktionen und deren Ableitungen, werden erforscht: zuerst beobachtet, dann beschrieben und letztendlich erklärt (Ingelmann 2009, S. 45)[38].

4.6) Die Integration offener Aufgaben in den Unterricht wird durch CAS unterstützt

Offene Aufgaben werden im Mathematikunterricht oft durch realitätsbezogene Aufgaben und Problemlöseaufgaben umgesetzt. Charakteristisch für das Lösen solcher Aufgaben sind nicht kalkülorientiertes Arbeiten, sondern Tätigkeiten wie Modellieren und Experimentieren. CAS beeinflusst einzelne Schritte dieser Lösungsprozesse und ermöglicht es, syntaktische Arbeiten automatisch durchzuführen, was einen selbstständigen Lernprozess unterstützt. Selbstständiges Lernen gibt Lehrpersonen eine neue Rolle: Sie begleiten ihre Schülerinnen und Schüler beim individuellen Lernen, führen sie aber nicht so stark wie im Frontalunterricht:

"The teacher has the duty to accompany and direct individual students on the voyage of discovery

---

[38] "'Der experimentelle Umgang mit einem Computeralgebrasystem kehrt in mancher Hinsicht klassische Unterrichtsverfahren um, die Methodik gleicht mehr der Methodik in den Naturwissenschaften, wo Phänomene zuerst beobachtet werden und dann erst beschrieben und erklärt werden. Dies ist eher der Arbeitsstil eines forschenden Mathematikers (Westphal, 1997, S. 102)." (nach Ingelmann 2009, S. 45)

through the world of mathematics." (Kutzler 2003, S. 70)

Wenn die Lernenden neben der Lehrperson noch CAS als zweiten „Experten“ befragen können, so entlastet dies alle Akteure im Klassenraum und fördert die Integration von offenen Aufgaben. Wie dieser zweite „Experte“ unterstützen kann, wird im Folgenden dargestellt.

Realitätsbezogene Probleme können in mathematischen Modellen, beispielsweise in Form einer Gleichung, eines Graphen oder einer Tabelle, beschrieben werden. Der gesamte Lösungsprozess wird im Modellierungskreislauf, welcher auch mehrmals durchlaufen werden kann, veranschaulicht (Abbildung 6) (vgl. Blum und Leiß 2005).

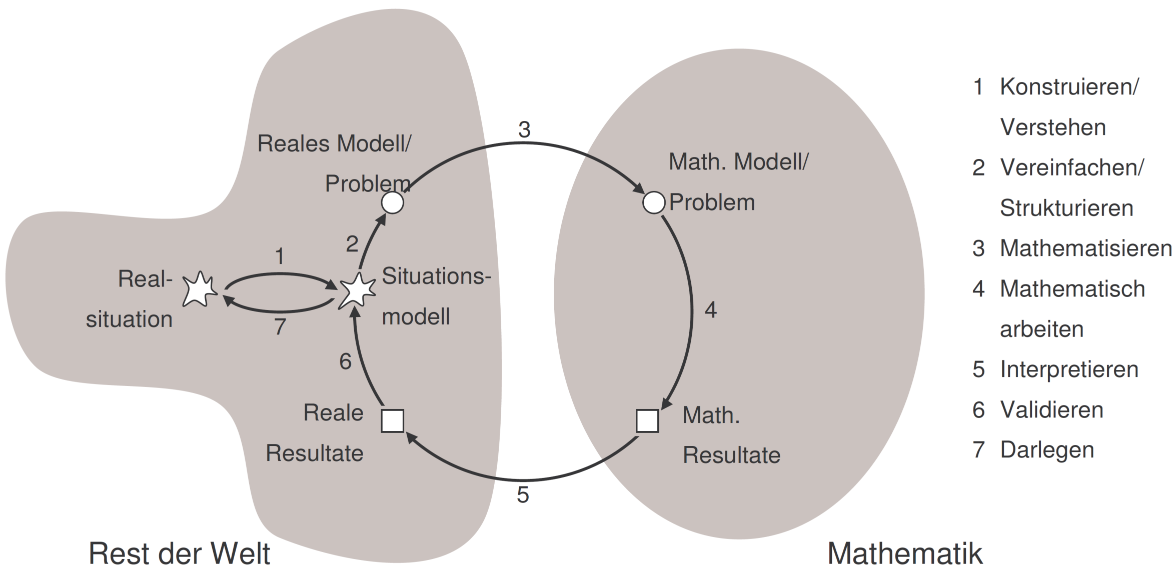

Abbildung 6: Modellierungskreislauf

CAS kann die in der Abbildung 6 mit 3 und 4 gekennzeichneten Schritte beeinflussen, was sich mit den Ergebnissen von (Weigand und Bichler 2009) deckt:

> "Wenn der Rechner eingesetzt wird, dann vor allem zu Beginn und bei der Problemlösung weniger dagegen zur Kontrolle." (Weigand und Bichler 2009, S. 2).

Beim Mathematisieren (Schritt 3) steht die Auswahl eines geeigneten Modells im Vordergrund. Wird der Rechner hierbei eingesetzt, so wird zunächst eine Repräsentation, also eine Anwendung des Rechners ausgewählt. Damit ist festgelegt, ob mit einem symbolischen oder numerischen Ausdruck, einem Graphen oder einer Tabelle gearbeitet wird (Doerr und Pratt 2008, S. 265ff.) oder sogar Verknüpfungen beider genutzt werden. Als Nächstes wird versucht, ein konkretes mathematisches Modell in diesem Rahmen zu entwickeln. Schritt 3 kann also in zwei Teile getrennt werden: die Auswahl der Repräsentation und die Entwicklung des konkreten Modells im Rahmen dieser Repräsentation. Schritt 4 (mathematisch arbeiten) verändert sich mit CAS dahin gehend, dass keine mathematischen Operationen durchgeführt werden, sondern der CAS-Output geprüft wird. Einerseits muss bei der Bearbeitung mit CAS von der Realität in die Mathematik und weiter in den Rechner übersetzt werden. Damit erfordert

> "Die Bearbeitung realitätsnaher Aufgaben mit einem Computeralgebrasystem […] zwei Übersetzungsprozesse." (Greefrath 2007, S. 57)

statt nur einen. Andererseits ermöglicht vor allem die Unterstützung bei Schritt 4 eine direkte Konzentration auf den Zusammenhang zwischen dem mathematischen Modell und dem mathematischen Resultat, was für das Modellieren ausgesprochen wichtig ist.

Werden realitätsbezogene Aufgaben oder Problemlösungsaufgaben konstruiert, so spielt die Auswahl geeigneter Zahlen eine wichtige Rolle. Mit CAS sind hier weniger Grenzen gesetzt (Drijvers 2003, S. 241)[39], denn es ist möglich, auch besonders ausgefallene, hohe und realistische Zahlen zu verwenden, da sie ohnehin automatisch verarbeitet werden können. In beiden Aufgabenarten eröffnet CAS damit die Möglichkeit, dass auch von Schülerinnen und Schülern, ohne große Konzentration auf die Zahlenwahl, gegenseitig Aufgaben gestellt werden können. Bei realitätsbezogenen Aufgaben mit CAS-Integration (oft als Optimierungsprobleme gestellt) (Lagrange 2003, S. 278)[40] bedeutet dies, dass die Verwendung tatsächlich realistischer, ungeschönter Daten stärkeren Realitätsbezug mit sich bringt (Kendal und Stacey 2001, S. 144; Kutzler 2003, S. 59)[41]. Mit entsprechendem Zubehör können sogar direkt Messdaten aufgenommen werden (z.B. Temperatur, Entfernung, Spannung usw.) (Masalski 2005, S. 1)[42].

Beim innermathematischen Problemlösen können extrem große oder kleine Zahlenbeispiele untersucht werden. Mathematische Experimente, beispielsweise beim Umformen sym-

---

[39] "This technological device [meant is the introduction of CAS] began to open new horizons that had previously been inaccessible and provided opportunities for exploring mathematical situations. In this way, the tool facilitated students' investigations and discoveries." (Drijvers 2003, S. 241)

[40] "[...] problems of optimization are popular because students can work on optimization problems using precalculus concepts. The graphic and numerical facilities of calculators are excellent supports to encourage students to consider multiple approaches to these problems." (Lagrange 2003, S. 278)

[41] "Computer algebra systems may change many methods of problem solving from being methods 'in principle' to bring methods 'in practice'. " (Kendal und Stacey 2001, S. 144)

"[...] CAS can be used to help students tackle problems that are more complex and more realistic [...]." (Kutzler 2003, S. 59)

[42] "Calculators, computer software tools, and other technologies assist in the collection, recording, organization, and analysis of data. The also enhance computational power and provide convenient, accurate, and dynamic drawing, graphing, and computational tools. With such devices, students can extend the range and quality of their mathematical investigations and encounter mathematical ideas in more realistic settings." (Masalski 2005, S. 1)

bolischer Ausdrücke, müssen jetzt nicht mehr im Kopf, sondern können in CAS vollzogen werden. Schülerinnen und Schüler werden dann mit einer Vielzahl von algebraischen Ausdrücken konfrontiert, die sie nicht mehr selbst Schritt für Schritt erstellen müssen, sondern sie werden vom Beispielgenerator CAS erzeugt:

> "Working with CAS, students are faced with a lot of algebraic expressions they don't have produced by themselves, step by step, and they have to make sense of these." (Artigue 2004, S. 218).

CAS nimmt die Rolle eines mathematischen Labors ein, in welchem Strategien des innermathematischen Experimentierens zum Tragen kommen*:*

> "[...] students can turn thought experiments into actual experiments, building a laboratory in which they can conduct investigations, explore conjectures, and look for patterns." (Cuoco und Levasseur 2003, S. 99)

4.7) CAS erhöht die Anzahl individueller Lösungswege und unterstreicht deren Zusammenhang

Greefrath (2007) charakterisiert Aufgaben zum Themenfeld Funktionen mit CAS-Integration folgendermaßen:

> - CAS-Aufgaben sind weniger kleinschrittig.
>
> - Es ist keine Funktionsgleichung vorgegeben.
>
> - Es ist kein Koordinatensystem vorgegeben.
>
> - Es sind keine Zwischenergebnisse angegeben.
>
> - Die CAS-Aufgabe ist offener formuliert." (Greefrath 2007, S. 56)

Die aufgezeigten Aspekte haften dem CAS-Einsatz nicht per se an, sie lassen sich allerdings damit einfacher hervorheben, denn CAS unterstützt das Lösen von offenen Aufgaben. Numerische Ansätze (z.B. mithilfe der Tabelle), symbolische Herangehensweisen (wie bei Gleichungen) und grafische Ansätze (wie beim Graph) können bei freier Wahl des Mediums sowohl von Hand, als auch technologiegestützt angewendet werden. Damit ergeben sich theoretisch doppelt so viele Ansatzmöglichkeiten. Lösungswege bei offenen Aufgaben können Kombinationen aus verschiedenen Ansätzen enthalten und fallen unter CAS-Zugriff vielfältiger aus (Laakmann 2008 #94: 45}[43]. Somit kann es jedem Lernenden ermöglicht werden seine individuellen Stärken zu nutzen und zu zeigen:

> "We should learn to identify those components of meaningful learning environments for algebra that allow everybody to demonstrate their strengths." (Yerushalmy 2006, S. 385).

[43] "[...] wo Lösungswege [bisher] frei gewählt werden können, legen sich die Lernenden mit der Wahl des Programms fest auf einen symbolischen, graphischen oder numerischen Ansatz. Mit den neuen MRP ist dies nicht mehr nötig. Die Aufgaben, sofern sie denn offen genug gestellt werden, können auf verschiedenen Wegen angegangen werden und bei auftretenden Schwierigkeiten ist ein Wechsel in eine andere Repräsentationsform direkt möglich." (Laakmann 2008, S. 45)

CAS erlaubt es symbolische Zugänge teilweise durch numerische zu ersetzen, beispielsweise durch Berechnen mehrerer numerischer Ergebnisse anstatt durch Analysieren eines symbolischen Ausdruckes (Heid und Blume 2008b, S. 95)[44]. Einerseits ermöglicht dies die Entwicklung weiterer Lösungsstrategien und eine symbolische Repräsentation kann auf Grundlage anderer entwickelt werden:

> "Our aim is that the subject will not be seen as solely symbolic. We make the need for symbolic expression of the ideas emerge from the varied approach." (Challis und Gretton 2002, S. 162)

Andererseits ist eine ausgewogene Verwendung mehrerer Repräsentationen wichtig, deren Wahl nicht nur auf individuellen Vorlieben beruht.

> "Jede [Repräsentation] für sich stellt einen oder mehrere Aspekte der Linearen Funktionen besonders heraus, doch erst alle Repräsentationen zusammen ergeben den gesamten Gehalt des Begriffs Lineare Funktion." (Laakmann 2008, S. 44)

Dies kann direkt auch auf Inhalte der Schulmathematik vor allem in der Oberstufe übertragen werden. Die individuelle Wahl einer Repräsentation (z.B. in Schritt 3 beim Modellieren) kann durch das verfügbare Medium gelenkt werden (Zeller und Barzel 2010). Stehen beispielsweise symbolische Umformungen nicht automatisch zur Verfügung, so fällt die Entscheidung seltener auf den symbolischen Zugang. Als Folge davon werden die Motivation, eine bestimmte Repräsentation zu verwenden und die damit verbundene objektive Bewertung der einzelnen Repräsentationen auch vom Medium beeinflusst.

Durch die dynamische Verlinkung verschiedener Anwendungen in CAS wird angeregt, zwischen verschiedenen Repräsentationen zu wechseln. An welcher Stelle im Lösungsweg, welche Repräsentation eingesetzt wird, muss nicht von Beginn der Bearbeitung an geplant sein. Vielmehr entwickelt sich der Lösungsprozess nach und nach. Am Ende sollte allerdings nicht nur das Ergebnis geprüft, sondern auch der Lösungsweg bewertend reflektiert werden (Ball und Stacey 2003, S. 293)[45]. Ein Vergleich verschiedener Lösungen kann als Grundlage für eine zusätzliche Lösung unter Einbezug aller Wege führen. In CAS kann dafür ein Dokument mit graphischen, numerischen und symbolischen Repräsentationen erstellt werden. Sind diese untereinander verknüpft, so können Zusammenhänge zwischen den Darstellungen erforscht und verdeutlicht werden.

---

[44] "While symbolic processors provide the opportunity to build a more robust understanding of mathematical phenomena, when coupled with other representations they also provide ways for students to circumvent work with symbols." (Heid und Blume 2008b, S. 95)

[45] "Because planning in mathematical problem solving does not occur in one step at the beginning of a solution but occurs opportunistically throughout in response to emerging findings (Hayes-Roth and Hayes-Roth 1979), we do not suggest that students write their plan at the start. Instead, they should look over their completed work and verify that the plan is clear." (Ball und Stacey 2003, S. 293)

4.8) Lehrer- und schülerzentrierte Unterrichtsmethoden erscheinen mit CAS in einem neuem Licht

Verschiedene Studien haben gezeigt, dass Lehrer erst selbst mit CAS vertraut werden müssen, bevor sie sich auf das Lernen ihrer Schülerinnen und Schüler konzentrieren können (Zbiek und Hollebrands 2008, S. 292)[46]. Besonders in selbstständigen Arbeitsphasen bekommen Lehrer die Möglichkeit, sich auf individuelle Lernschwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler zu konzentrieren und Fehlvorstellungen bei der Arbeit mit CAS zu erkennen (Heid und Blume 2008c, S. 428, Edwards 2003, S. 119)[47]. Die aktuelle Lehrergeneration selbst hat jedoch Mathematik ohne CAS gelernt und kann daher weniger Parallelen in eigenen Lernwegen wahrnehmen (McCallum 2003, S. 82)[48]. Sie müssen daher den Wert von CAS erst selbst erkennen, erfahren und zu dem Schluss kommen, dass man Schülerinnen und Schüler „niemals zu viel Macht" in die Hand legen kann:

> "We begin to appreciate the possibility that you can never put 'too much power' in the hands of learners." (Arnold 2004, S. 17).

Wenn die Lehrperson nun vor der Herausforderung steht, offene Aufgaben zu integrieren und ihren Schülerinnen und Schülern selbstständiges Arbeiten zu ermöglichen, dann müssen viele Aspekte der methodischen Gestaltung des Unterrichts neu überdacht werden. Diese Änderungen stehen in starkem Zusammenhang zu den inhaltlichen Änderungen des Mathematikunterrichts durch CAS und weniger in direktem Bezug zu CAS:

> "Unterricht verändert sich nicht durch die Existenz von 'guten' Aufgaben, wie sie evtl. in einigen Aufgabensammlungen aneinandergereiht sein mögen. Unterrichtsentwicklung ist eine dauerhafte Aufgabe von Lehrerinnen und Lehrern, die nur vor Ort geleistet werden kann." (Pallack 2007b, S. 46)

> "A substantial set of comments were about adopting a more investigative or constructivist approach to their teaching, or using technology more widely in both CAS and non-CAS classes. A few teachers said that they had been reflecting more on their teaching practices." (Neill 2009, S. 17)

---

[46] "Findings from several research studies (Beaudin und Bowers 1997; Tharp et al. 1997; Wiske und Houde 1993) suggest there may exist stages through which teachers pass or a level of comfort and familiarity with the technology and curriculum before they are able to focus on students and what they are learning." (Zbiek und Hollebrands 2008, S. 292)

[47] "[...] technology allows us to attend to or refine our thinking about students' mathematical thinking (Clements et al., 2008) and 'the computer acts as a window on students' understandings and construction of meaning' (Hollebrands et al., 2008, p. 190)." (Heid und Blume 2008c, S. 428)

"[...] CAS-based investigations encourage teachers to reexamine student misconceptions regarding algebraic symbolism. At the same time, CAS-based investigations provide instructors with possible teaching remedies for these misconceptions." (Edwards 2003, S. 119)

[48] "We find ourselves wandering into unknow territory. Those of us brought up in the pre-CAS era have difficulty in imagining how students can develop the ability to recognize that $x+1/x=a$ can be transformed into a quadratic equation if they have not spent many hours working paper-and-pencil exercises." (McCallum 2003, S. 82)

Neill (2009) bekam von Lehrerinnen und Lehrern, die bei seinen Feldstudien teilnahmen, Hinweise darauf, dass CAS zum Überdenken dieser Änderungen anregen kann.

Bei selbstständigem Lernen werden von Schülerinnen und Schülern oft informelle Gespräche geführt, die allerdings für das Lernen von Mathematik gewinnbringend sein können (Barzel 2006b, S. 322; Ball und Stacey 2005c, S. 127)[49]. CAS regt solche Gespräche an, da der unterschiedliche individuelle Umgang mit CAS dabei gut ausgetauscht werden kann. Lehrerinnen und Lehrer können nicht kontrollieren oder korrigieren, was dabei besprochen wird, dennoch müssen sie solche Gespräche zulassen.

Die Aufgabe der Lehrperson verschiebt sich jedoch nicht nur bei selbstständigem Arbeiten, sondern auch in Frontalphasen. Hier muss es verstärkt darum gehen, Klassendiskussionen wirklich schülerzentriert zu führen (Özgün-Koca 2010, S. 52)[50]. Dabei stellen Schülerinnen und Schüler die Fragen selbst und sie werden auch von Schülerinnen und Schülern beantwortet. Die Lehrperson moderiert diese Gespräche und versucht individuelle Lösungen und Antworten auf einen Konsens zu bringen (Aldon 2010, S. 1)[51]. Der Verlauf solcher Gespräche kann im Vorhinein nicht genau geplant werden und die Lehrperson muss im Unterricht flexibel reagieren.

In der Planung werden die Auswahl von Aufgaben und die dabei intendierten kognitiven Anregungen wichtiger. Diese Aspekte können dann beispielsweise in einer Lernwerkstatt umgesetzt werden (Aldon 2010, S. 733)[52]. Inhaltlich werden nicht nur mathematische Inhalte reflektiert, sondern auch der Umgang mit Technologie. Zur Verbindung dieser beiden Punkte in Diskussionen können mit Beamern oder Overheadprojektionsgeräten Rechnerbildschirme dargestellt werden als Grundlage und zur Visualisierung der Gespräche (Edwards 2003, S. 132)[53].

Als weitere neue Herausforderung, sowohl für die Planung als auch für die Durchführung, steht das Finden einer zeitlichen Balance zwischen Rechnereinsatz und Phasen ohne

---

[49] „informelles Reden über Mathematik wird als sehr wichtig empfunden“ (Barzel 2006b, S. 322)

"Interviewees also confirmed that peer networks, within and across classes, were important for sharing technical information about using CAS." (Ball und Stacey 2005c, S. 127)

[50] "Whole class/ group discussion was one of the instructional methods that was suggested to be used when CAS is utilized (Edwards 2003; Drijvers 2004a; Kieran 2007; Lagrange 2007)." (Özgün-Koca 2010, S. 52)

[51] "The teacher orchestrates the mathematical situation within the dynamic environment of the class such that the targeted result of the learning process, viewed as a fixed point, becomes close to the set of intentions." (Aldon 2010, S. 733)

[52] "[...] outside the class, the teacher has didactical intentions, and plans lessons searching and organizing resources in order to arrange the students' milieu." (Aldon 2010, S. 733)

[53] "When used to project calculator-generated solutions onto an overhead screen, the CAS is particularly helpful in encouraging classroom discourse." (Edwards 2003, S. 132)

Medium bzw. bewusst mit anderen Medien (Özgün-Koca 2010, S. 52; Lagrange 2003, S. 278)[54]. Challis (2002) gibt in diesem Zusammenhang zu bedenken, dass CAS nicht dazu führen darf, dass es zu einem Übergewicht an Symbolischem kommen darf und dass deshalb auch andere Medien es wert sind, gezielt integriert zu werden (Challis und Gretton 2002, S. 162).

[54] "Some of the difficulties about implementing CAS reported by teachers were the time devoted for development of instructional materials and getting accustomed to the CAS (Lumb et al. 2000). Therefore, in-class and out-of-class time management for teachers could become an issue when CAS is involved." (Özgün-Koca 2010, S. 52)

"For the teacher, the challenge was thus to manage the time and to establish a balance between handling expressions in the calculator and conducting a mathematically productive discussion." (Lagrange 2003, S. 278)

5) Einflüsse von CAS auf die Leistungsmessung

5.1) Bislang kaum veränderte Aufgabenstellungen in CAS-Prüfungen, aber erhöhte Vielfalt der Lösungsstrategien

Roger Brown (University of Bath, UK), „research manager" für Mathematik beim Internationalen Baccalaureate, berichtet im Rahmen einer Vergleichsstudie, dass sich die Aufgaben bei einem CAS-gestützten Abitur nur wenig von einem CAS-freien Abitur unterscheiden[55], dass sich jedoch die Vielfalt an Lösungsstrategien erhöht:

> "This [study] will use a framework developed by the author to investigate the role that the CAS plays within the CAS assumed examinations, some comparison will be made with identical non-CAS graphics calculator assumed examinations. The results reveal surprisingly little difference in the types of questions used; however, the CAS greatly enhances the range of solution strategies available to students." (Brown 2003, S. 155)

Auch Weigand (2006) stellt fest, dass „die überwiegende Mehrzahl der Aufgaben in gleicher Weise auch dann gestellt werden könnten, wenn in den Prüfungen kein TC [Taschencomputer] erlaubt gewesen wäre" (Weigand 2006, S. 102). Einen möglichen Grund dafür sieht Weigand (2006) in der Tatsache, dass CAS häufig noch nicht im Abitur und damit auch nicht in der Sekundarstufe II zugelassen sind (Weigand 2006, S. 107). Pallack (2007) nennt einen weiteren Grund dafür, dass das Potenzial der CAS-Funktionalität in Klausur- und Prüfungsaufgaben nicht zum Tragen kommt: Generell unterscheiden sich Aufgaben in Unterricht und Prüfung vor allem durch den Grad der Offenheit und die zur Lösung notwendige Kreativität. In Klausuren werden v.a. Aufgaben gewählt, die „einigermaßen objektiv auswertbar sind" (Pallack 2007a, S. 92). Wahrscheinlich haben sich genau aus diesem Grund „Struktur und Typen der Fragen gegenüber den früheren CAS-freien Prüfungen [...] nicht wesentlich veränder[t]" (Weigand 2006, S. 92; siehe auch Brown 2003).

Wie Brown betont auch Weigand (2006), dass durch den CAS-Einsatz den Schülerinnen und Schülern eine größere Vielfalt an Lösungsstrategien ermöglicht wird, wodurch sich für die Schülerinnen und Schüler der Vorteil ergibt, Lösungsstrategien individuell auswählen zu dürfen (Weigand 2006, S. 92). Bauer (2006) meint sogar in diesem Zusammenhang, dass sich beim Nutzen von CAS in Prüfungen im Prinzip nicht viel an den Aufgaben selbst ändern muss, da der Erschließungsprozess derselbe ist. Eine Frage muss zunächst verstanden werden, damit sie bearbeitet werden kann, unabhängig davon ob sie nun mit oder ohne CAS-

[55] Hierbei muss betont werden, dass unter CAS-frei hier ein Abitur mit grafikfähigen Taschenrechnern zu verstehen ist, einem Standard, der schon lange für das Internationale Baccalaureate gilt.

Einsatz gestellt wird. Nur dann kann man wissen, welche Eingabe im Rechner nötig ist. Und nur dann kann man das Ergebnis richtig interpretieren und einordnen.[56]

5.2) Neue Aufgabenformate um zusätzliche Kompetenzen zu überprüfen

Auch wenn Bauers Feststellung einerseits richtig ist, so wird man mit dieser Haltung jedoch den veränderten Prüfungsanforderungen bei einem veränderten Unterricht nicht vollends gerecht. Viele der in Kapitel 4 beschrieben neuen Akzente bei den Schülerkompetenzen bleiben in der Prüfung beim Verharren auf traditionellen Aufgaben unberücksichtigt. Vor allem das verstärkte Einbeziehen im Bereich des Modellierens und Problemlösens wird bei eher traditionell geprägten Aufgaben nicht überprüft. Auch im Rahmen des australischen CAS-CAT Projekts wird gefordert, dass sich Aufgabenformate und -anforderungen im Laufe der Zeit ändern müssen, um sich den neuen unterrichtlichen Anforderungen anzupassen. Neill benennt explizit, dass die Schwerpunktverschiebung im Anforderungsbereich der Aufgaben im Unterricht auch ein Überdenken der Prüfungsaufgaben nach sich ziehen muss. Ziel muss es sein, Schülerinnen und Schülern wirklich über ihr mathematisches Verständnis zu prüfen und nicht über die Fähigkeit, Antworten aus dem Rechner zu erlangen.[57] (Neill 2009, S. 25).

Pallack konkretisiert die möglichen Veränderungen von Prüfungsaufgaben als Anpassung an die veränderte Unterrichtskultur. Als Unterschiede zwischen CAS- und Non-CAS-Aufgaben für Prüfungen nennt er eine höhere Komplexität, höhere sprachliche Anforderungen, den Vergleich von mehreren alternativen Zugängen bzw. Modellierungen und der Anforderung, das Medium adäquat einzusetzen. (Pallack 2007a, S. 92)

Der erhöhte sprachliche Anteil wird vor allem durch das Einbeziehen der Interpretation und Reflexion von Ergebnissen in einem Kontext ausgelöst. (Weigand 2006, S. 104). Im CAS-CAT-Projekt wurden Schwierigkeiten durch verstärkte Schüleraufschriebe bei Prüfungsaufgaben herausgestellt. Die Schülerinnen und Schüler vermischen oft den mathematischen Formalismus und Rechnersprache und schreiben z.B. auch in den Lösungen von EXPAND oder SOLVE. (Ball und Stacey 2005b, 2003). Hier muss gezielt Transparenz für alle Beteiligten geschaffen werden, welche Art von Sprache in schriftlichen Prüfungen erwartet wird und welche erlaubt ist.

---

[56] „[O]hne Verständnis und ohne Einsicht in die Fragestellung [sind bei der Bearbeitung von Aufgaben] keine Erfolge möglich." (Bauer und Tschacher 2006, S. 12)

[57] „It is clear that assessment questions need to be of a different type, especially in high-stakes summative assessments [...]. This is to ensure that the students are being assessed on their mathematical understanding, and not just their ability to obtain answers from the technology." (Neill 2009, S. 25)

5.3) CAS erhöht die sprachlichen Anteile in den Lösungen

Diese neuen Kompetenzbereiche sollten für Prüfungen insofern erschlossen werden, dass sie alte Prüfungsbereiche ersetzen. Beispielsweise werden einfache Kalkülumformungen nicht mehr mit Punkten belohnt, wenn CAS eingesetzt wird. Auch Zwischenschritte werden seltener bewertet, da bestimmte symbolische Umformungen mit CAS trivial werden (Ball und Stacey 2005b, S. 114). Des Weiteren können Zwischenschritte weniger zuverlässig bewertet werden, wenn durch CAS zahlreiche Lösungswege möglich und nur schwer überschaubar sind (Ball und Stacey 2003, S. 297). Sowohl Erhöhung des sprachlichen Anteils als auch die vermehrte Vielfalt der Lösungsstrategien macht die Korrektur schwieriger (Weigand 2006, S. 107). Für alle Beteiligten sollte die Bewertung dennoch möglichst objektiv und transparent sein, z.B. sollte klar sein, welche Zwischenschritte Punkte erhalten, welche nicht, was wichtig ist und was nicht. Brown (2003) gibt hier die konkrete Empfehlung, bereits in der Fragestellung deutlich zu machen, ob der Fokus der Aufgabe auf der Lösung oder dem Lösungsprozess liegt, um so Transparenz gerade für die Schülerinnen und Schüler zu erreichen (Brown 2003, S. 178–179) und die Unsicherheiten für Lehrpersonen sowohl bei der Erstellung von Prüfungsaufgaben als auch bei der Bewertung der Lösungen zu verringern (Bichler 2007, S. 101).

In jedem Fall steigt mit der Komplexität der zu überprüfenden Anforderungen auch die Komplexität der Korrektur (Bradford et al. 2009, S. 93). Es ist eben nicht mehr so leicht festzulegen, welche Antwort als richtig gilt, wie z.B. eine Antwort in Schülersprache, die nicht die Anforderungen an mathematisch korrekte Notation erfüllt, zu bewerten ist (Bradford et al. 2009, S. 93)[58].

Ein Aspekt der erhöhten Komplexität liegt auch in der neu hinzugefügten Medienkompetenz. Ein Medium entsprechend der Aufgabenstellung und dem eigenen Lösungsansatz passend zu wählen und adäquat einzusetzen, wird vielfach genannt (Brown 2003, S. 178; Pallack 2007a, S. 92) und als wichtiges neues Merkmal für Prüfungssituationen betont.

5.4) CAS regt zu neuen Prüfungsformaten an

Es scheint Übereinstimmung zu herrschen, dass sich mit diesen veränderten Kompetenzen auch die äußeren Formate der Prüfungen ändern sollen. Dass der CAS-Einsatz im Unterricht notwendigerweise mit einem Einsatz in Prüfungen verbunden ist, ist für alle eine eindeutige Folgerung. In der bayrischen M³-Studie wird dies auch von den Lehrkräften explizit hervorgehoben: „Dies zeigt, dass mit Abstand die meisten Projektlehrkräfte die Integration

[58] "A perennial problem in computer-aided assessment is that 'a right answer', pedagogically speaking, is not the same thing as 'a mathematically correct expression', as verified by a computer algebra system, or indeed other techniques such as random evaluation." (Bradford et al. 2009, S. 93)

des TC in Prüfungen als unerlässlich ansehen [...]" (Bichler 2007, S. 99). Auch der wichtigste Grund für diese Folgerung wird hier auf den Punkt gebracht:

> „Verbietet man grundsätzlich den Einsatz des Taschencomputers in Prüfungen, so verringert sich seine Akzeptanz auf Lehrer- wie Schülerseite bis zum Nichteinsatz der Systeme." (Bichler 2007, S. 99)

Ebenso übereinstimmend wird aber auch konstatiert, dass es erklärtes Ziel ist, trotz des Rechnereinsatzes bewusst darauf zu achten, dass auch Fertigkeiten im Kopf und mit Papier zu fordern sind. So sollen z.B. die „mit dem Rechner entwickelte[n] Fähigkeiten – z.B. das Interpretieren von Funktionsgraphen – auch ohne Rechner zur Verfügung stehen" (Weigand 2006, S. 102). Deshalb wird vielfach ein rechnerfreier Teil bei schriftlichen Prüfungen gefordert. [59]

Wichtig erscheint auch die Anregung, dass es bewusst auch andere Prüfungsformen geben muss. So ließe sich in mündlichen Prüfungen oder Projektreferaten stärker die Kompetenz widerspiegeln, Mathematik adäquat zu beschreiben, zu präsentieren und für die eigenen Wege zu argumentieren, als dies mit einer alleinigen schriftlichen Prüfung möglich ist:

> "Learning to communicate mathematics must have a different emphasis in the curriculum." (Thomas et al. 2004, S. 172)

6) Gelingensbedingungen und Empfehlungen als Kristallisation der Erkenntnisse

Studien und die daraus folgenden Erkenntnisse zeigen, dass es sinnvoll ist, Computeralgebra-Systeme in die Schule zu integrieren, da CAS ein Katalysator für einen kompetenzorientierten, schüleraktivierenden und verstehensorientierten Unterricht sein kann. CAS dient als Unterstützer der momentanen Bildungsziele und erleichtert deren Umsetzung. Dabei ist unbedingt zu beachten, dass CAS kein Selbstläufer ist, sondern es bestimmter Rahmenbedingungen bedarf, damit der Nutzen des CAS-Einsatzes zum Tragen kommen kann.

Die Integration von CAS hat eine besondere Bedeutung, wenn man den aktuellen Forderungen nach Medienintegration und -kompetenz gerecht werden und zur allgemeinen Medienintegration in der Schule hinführen will. Medien in die Schule zu integrieren, ist notwendig, der momentanen Zeit entsprechend und wohl nicht aufhaltbar. Höchstwahrscheinlich wird sie einen Höhepunkt mit der Einführung von Laptops oder immer kleiner werdenden Handhelds, ähnlich den Entwicklungen in den Kommunikationsmedien für alle Fächer, erreichen, auch wenn dies für den Bildungsbereich noch mehrere Jahre dauern wird.

Dennoch ist momentan zumindest für den naturwissenschaftlichen Bereich der Schule mit den immer ausgereifteren Taschenrechnern eine geeignete Technologie auf dem Markt, die man leicht für alle Schülerinnen und Schüler sowohl im Unterricht als auch im außerunterrichtlichen Bereich ständig verfügbar machen kann. Die leichte Verfügbarkeit ist eine wichtige didaktische Forderung hinsichtlich des Umgangs mit Medien, so dass der Mathematikunterricht einen wichtigen Beitrag bei der allgemeinen Entwicklung von Medienkompetenz leisten kann.

Handhelds sind der Nutzung digitaler Medien in fest installierten PC-Räumen vorzuziehen, da nur dann die ständige Verfügbarkeit für alle Lernenden auch außerhalb des Unterrichts gesichert ist. Zudem ist mit Handhelds auch der Wechsel zu rechnerfreien Phasen beim Arbeiten schneller und unproblematischer zu realisieren, weil die äußere Dominanz eines Rechners leicht „bei Seite" gelegt werden kann. Das hat vor allem für die Organisation im Rahmen einer Schule und während der Prüfungen Vorteile. Die fehlende Infrarot- oder Funkschnittstelle an den derzeit gängigen Taschenrechnermodellen mag altmodisch erscheinen, ist aber für die Prüfungssituation von großem Vorteil. Hier bleibt zu hoffen, dass die technische Entwicklung auch weiterhin nach pädagogisch sinnvollen Kriterien vollzogen wird.

Erfreulich ist, dass der Entwicklungsprozess im Mathematikunterricht international durch viele Aktivitäten wissenschaftlich und empirisch begleitet wurde und wird. Feldversuche und Interventionsstudien scheinen jedoch nicht zu genügen, um flächendeckende, verallgemeinernde Aussagen zu treffen. Stattdessen könnten Langzeitstudien oder groß angelegte Studien mit zahlreichen Schülerinnen und Schülern sowie Lehrern helfen, die Medienintegration zu erleichtern und für das Lernen zu optimieren.

6.1) Gelingensbedingungen

Die folgenden Gelingensbedingungen stellen Erkenntnisse aus den vorangegangenen Kapiteln dar. Sie werden zunächst kurz benannt, um in einem weiteren Schritt in Detailempfehlungen konkretisiert zu werden.

CAS sollte verpflichtend im Curriculum eingebunden sein

Die Möglichkeiten von CAS werden nur dann flächendeckend zum Tragen kommen, wenn der Einsatz auch verbindlich und klar vorgeschrieben ist. Parallel dazu muss die Entwicklung neuer Unterrichtsmaterialien und –konzepte weiter voranschreiten, um den aktuellen Anforderungen gemäß der Bildungsstandards gerecht zu werden.

CAS sollte verbindlich im Abitur verankert sein

Eine verbindliche Vorgabe von CAS im Curriculum zieht eine Integration von CAS in Prüfungen unmittelbar nach sich (Bichler 2007, S. 99)[60]. Das schriftliche Abitur sollte aus zwei Teilen bestehen - einem rechnerfreien und einem rechnerverpflichtenden Teil. Zudem sollten neue Prüfungsformate bedacht werden, damit sich die veränderten Anforderungen im Unterricht auch in den Überprüfungen widerspiegeln.

Lehrerbildung muss gestärkt werden als Motor der Veränderung

Lehrerinnen und Lehrer müssen vorbereitet sein auf die künftigen Veränderungen. Die Akzentverschiebung von einem eher kalkülorientierten Unterricht hin zu einem Unterricht mit gleichzeitigem inhalts- wie prozessbezogenen Fokus geschieht nicht allein durch den CAS-Einsatz, sondern bedarf vor allem einer neuen inhaltlichen und methodischen Gestaltung von Unterricht. Dabei spielt die Lehrkraft die Schlüsselrolle. Deshalb ist eine angemessene Lehreraus- und fortbildung von entscheidender Bedeutung.

Netzwerke für Eltern, Lehrer und Schüler aufbauen und stärken

Die unterrichtlichen Veränderungen müssen als gemeinsame Aufgabe aller daran Beteiligten aufgefasst werden. Deshalb sollte ein Netzwerk entstehen: zunächst für die Lehrkräfte als kontinuierliche Begleitung und Möglichkeit des Austauschs, aber auch ein Netzwerk für Eltern sowie Schülerinnen und Schüler, um den Sinn und die Chancen der Veränderungen transparent werden zu lassen. So könnte eine Website mit Foren für Eltern (Informationen und Hintergründe), Lehrer (passwortgeschützt für Material und Erfahrungsaustausch) sowie Schüler (Applets und Infos zur technischen Bedienung) ein Instrument zur Information und zum Austausch werden.

Strukturelle Rahmenbedingungen klären

Es müssen für alle Beteiligten die strukturellen Rahmenbedingungen transparent sein, z.B. bezüglich Finanzierung und Organisation von Handhelds oder von Lizenzen.

---

[60] "Verbietet man grundsätzlich den Einsatz des Taschencomputers in Prüfungen, so verringert sich seine Akzeptanz auf Lehrer- wie Schülerseite bis zum Nichteinsatz der Systeme." (Bichler 2007, S. 99)

6.2) Konkrete Empfehlungen

6.2.1) Zum Curriculum

In einer Metastudie von Heid (Heid 2003) wurde festgestellt, dass CAS dann den maximalen Einfluss auf das Lernen der Schülerinnen und Schüler ausübt, wenn es auch eine zentrale Rolle im Curriculum spielt[61]. Deshalb ist es zwingend notwendig, dass CAS im Curriculum fest verankert ist. Dabei ist es wichtig, dass im Curriculum auch die aktuellen Forderungen einer Akzentverschiebung von kalkülhaftem Lernen hin zu einem stärkerem Einbezug prozessualer Kompetenzen, also einer verstärkten Integration von Kompetenzen wie Modellieren und Problemlösen, dargelegt werden[62]. Im Curriculum sollte verbindlich festgeschrieben werden, welchen Beitrag der Mathematikunterricht zur Entwicklung der allgemeinen Medienkompetenz leisten muss.

Die Verankerung von CAS im Curriculum kann in zwei Stufen geschehen werden. Da CAS potenziell den größten Einfluss im Bereich der Oberstufenmathematik ausübt, sollte es zunächst in der Oberstufe (evtl. als erste Stufe) fest vorgegeben sein. In einer zweiten Stufe sollte jedoch ein früherer CAS-Einsatz aufgebaut werden. Zu befürworten ist der Einsatz bereits ab Jahrgang 8, also mit dem Beginn der Funktionenlehre und der Algebra, da CAS hier auch einen positiven Einfluss auf das Lernen hat (vgl. Kap. 4.1, siehe auch Pierce et al. 2009[63]). CAS schon in der Sekundarstufe I einzusetzen, hätte den großen Vorteil für die Oberstufe, dass das Medium den Schülerinnen und Schülern bereits vertraut ist und dadurch mehr Raum für das inhaltliche Lernen bleibt.

Anzustreben ist der Einsatz von CAS im Verbund mit Tabellenkalkulation und Dynamischer Geometriesoftware, die mittlerweile vernetzt in einem Programm erhältlich sind, z.B. bei TI Nspire CAS oder bei ClassPad 330 (vgl. Kap. 2). Neben der Verbindung von TK, DGS und CAS wird die Handheld-Version dieser Vernetzung empfohlen, da der Rechner den Schülerinnen und Schüler so immer - auch zuhause – sicher verfügbar und die Organisation an der Schule leichter umsetzbar ist. Zudem steht der Rechner damit nicht äußerlich im Mittelpunkt.

---

[61] "[...] CAS have the greatest impact on student learning when they assume a central role in the mathematics curriculum." (Heid 2003, S. 35)

[62] "Instead of modifying the system so that it does not merely give the answer, we could modify the curriculum so that equation-solving is no longer the focus of the course. In most introductory courses, relatively little time is spent on word problems and practical applications; this new course would reverse the trend. (Nunes-Harwitt, 2004/2005, p. 160)." (Heid und Blume 2008b, S. 63)

[63] "[...] for schools that have good access to CAS technologies and teachers who are already familiar with their use [...], CAS can support skill development and contribute to deeper learning in the middle years of secondary school and is therefore to be recommended." (Pierce et al. 2009, S. 1170)

Wenn der Einsatz von CAS sowohl für den Mathematikunterricht verbindlich als auch im Curriculum festgeschrieben ist, muss der Einsatz auch im Abitur verpflichtend sein, da die Akzeptanz sonst nicht gewährleistet wäre (Bichler 2007, S. 99).

6.2.2) Zu Prüfungen

Wird der CAS-Einsatz für Prüfungen verpflichtend eingeführt, müssen auch gezielte Unterstützungsangebote für diejenigen Gruppen in Aussicht gestellt werden, die die Aufgaben erstellen. In Prüfungen ist es sinnvoll, verschiedene Aufgabenformate einzubeziehen. Brown (2003) schlägt dabei vor, dass es Aufgaben geben sollte,

- bei denen CAS benötigt wird,
- bei denen CAS optional eingesetzt werden kann,
- bei denen es egal ist, ob sie mit oder ohne CAS gelöst werden und
- bei denen CAS ausgeschlossen ist, also rechnerfreie Aufgaben (Brown 2003, S. 156).

Die Umstellung der Prüfungsarbeiten sollte dabei schrittweise erfolgen:

> "Die [...] Änderung der Aufgabenkultur kann in zentralen Prüfungen in mehreren Schritten erfolgen [...]. So werden zunächst eher traditionelle Aufgaben mittels Operatorenlisten an die Verwendung von Taschencomputern angepasst. Danach werden schrittweise mehr Anwendungsaufgaben gestellt und im dritten Schritt beginnt man mit der Stellung offener Aufgaben." (Heinrich 2007, S. 88)

In Thüringen ist dieser Prozess bereits gestartet und sollte gezielt weiter verfolgt werden. Vor allem die Ideen zur Trennung der schriftlichen Prüfungen in einen rechnerverpflichtenden und einen rechnerfreiem Teil (wie bereits in der sogenannten thüringischen „o-HiMi-Handreichung“[64] konkretisiert) sollten weiter verfolgt werden.

Als Leitlinien für die inhaltliche Gestaltung von veränderten Aufgabenformaten, die besser die im Unterricht erworbenen Kompetenzen erfassen, können zum Beispiel die Anregungen von (Pallack 2008:) dienen. Um eine angemessene Balance zwischen Aufgaben hoher und niedriger kognitiver Komplexität bei Klausur- und Prüfungsaufgaben zu erreichen, nutzt Pallack in Anlehnung an (Dekker 2007) als Orientierung ein Pyramidenmodell mit drei Ebenen. Diese drei Ebenen sollten nicht hierarchisch zueinander, sondern in Prüfungen in angemessenem Umfang (z.B. 3 zu 2 zu 1) berücksichtigt werden:

- Die unterste Ebene (Reproduktion) beinhaltet die Wiedergabe von Fakten, die Anwendung von Standardalgorithmen sowie technische Fertigkeiten.

[64] Diese Handreichung wurde thüringischen Lehrpersonen zur Verfügung gestellt und soll bei der Gestaltung von Aufgaben für einen Klausurteil „ohne Hilfsmittel” unterstützen.

- Die zweite Ebene erfordert das Herstellen von Zusammenhängen, wobei dazu mehrere Argumentationsschritte notwendig sein sollten, sowie das Lösen von Problemen, bei denen verschiedenste Strategien notwendig sind.
- Die dritte Ebene (Begründen) bezieht sich auf komplexere Gegenstände wie mathematisches Denken und Begründen, Kommunikation, Reflexion, das Entwickeln eigener Modelle und das Verallgemeinern. (Pallack 2008:, S. 54)

Auch wenn diese Ebenen an die Anforderungsbereiche der EPA erinnern, so ist hier ein entscheidender Unterschied zu sehen, der ein Umdenken erfordert: Aufgaben der dritten Ebene sind nicht notwendig schwierig. Pallack (2008) konkretisiert diese Vorschläge an konkreten Prüfungsbeispielen und gibt damit eine gute Orientierung für Entwickler von objektiv auswertbaren Prüfungsaufgaben.

Anregungen zur Gestaltung von Prüfungen und konkrete Aufgabenbeispielen, die den Mehrwert, den CAS im Lernprozess spielt, auch in der Klausur aufnimmt, hat auch eine bundesweite Arbeitsgruppe im Rahmen des von der KMK empfohlenen Lehrerfortbildungsprojektes T^3 (Teachers Teaching with Technology) erarbeitet. Das dabei entstandene interne Arbeitspapier kann sicherlich zur Verfügung gestellt werden[65].

Besonders in Bezug auf die Prüfungen kann darüber debattiert werden, wie sinnvoll die Aufnahme und Integration alternativer Formen der Leistungserhebung für den zukünftigen Mathematikunterricht ist. Da die Kommunikation mit CAS stark gefördert und gefordert wird (vgl. Kapitel 5), bieten sich beispielsweise Präsentationen zu offenen Problemstellungen oder umfassenden Themen als zusätzliches Format neben Klausur und mündlicher Prüfung an.

6.2.3) Zur Lehrerbildung

> „CAS kann bei der Realisierung der aktuellen Forderungen an den Mathematikunterricht seinen Beitrag leisten, aber niemals einen guten Mathematiklehrer ersetzen.“ (Burkhardt 2003, S. 23)

Die einzelne Lehrperson spielt die Schlüsselrolle bei einer unterrichtlichen Veränderung.[66] Deshalb ist eine angemessene Lehreraus- und -fortbildung als Vorbereitung auf die Schwerpunktverschiebung im Lernprozess dringend notwendig, damit die Akzentverschiebung vom Regellernen hin zur bewussten Auswahl mathematischer Verfahren, zur Musterer-

[65] Arbeitspapier der T^3–Themengruppe „Zentralabitur mit CAS“ (Stand: 29.12.2007). Kontakt: www.t3deutschland.de

[66] "In general, students who begin their CAS experience with a positive or less sceptical view of learning mathematics with technology may eventually conclude that technology is not a panacea. In our students' opinions, we, their teachers, continue to be the most significant factor in maintaining or improving their attitudes." (Zbiek 2003, S. 201)

"[...] interaction with a teacher was necessary for meaningful learning to take place. Neither the technology nor children's own explorations were sufficient for conceptual learning [...]." (Olive und Lobato 2008, S. 44) kennung sowie zu Interpretationen von Ergebnissen und Anwendungen in realen Sachkontexten gelingen kann. Diese Akzentverschiebung findet nicht nur auf der inhaltlichen Ebene statt, sondern zieht eine weitere auf struktureller und methodischer Ebene nach sich.

Fortbildungen sollten deshalb eine Mischung darstellen zwischen der Vermittlung der technischen Bedienung eines CAS, der veränderten Aufgabenkultur und einer veränderten Unterrichtsorganisation (methodische Gestaltung des Unterrichts). Dabei spielt auch der Austausch zwischen den Lehrern eine große Rolle[67].

In einer Fortbildung sollte auf Folgendes eingegangen werden:

- Die ausführliche Ersteinführung in die Rechnerbedienung sollte bewusst und ausreichend vollzogen werden, damit Lehrpersonen zumindest ein Produkt intensiv kennenlernen. Die Übertragung auf andere vergleichbare Produkte ist wegen der häufig ähnlichen Menüführung in der Regel leicht möglich. Im günstigsten Fall sollten CAS und auch die anderen relevanten Medien (TK, DGS) bereits in die Ausbildung integriert sein. Daneben sollten aber auch weitere Unterstützungssysteme bei der technischen Einführung in die Rechnerbedienung aufgebaut werden, damit die Unterrichtszeit bei der technischen Vermittlung durch Lehrerinnen und Lehrer minimiert werden kann[68] . Dazu gehören Hilfeprogramme zur Bedienung des Rechners im Internet oder als Software auch für Handhelds, das bewusste Einbeziehen der Schülerinnen und Schüler beim Vermitteln von Rechnerkenntnissen im Sinne eines Lernens durch Lehren, da Schüler oft technisch viel versierter und schneller sind.
- Im Rahmen von Fortbildungen sollten neue Aufgabenformate vorgestellt werden, die verstärkt das Modellieren und Problemlösen fördern und weniger kalkülorientiert sind, sich dafür aber stärker auf das Interpretieren und Anwenden von Ergebnissen konzentrieren.
- „[...] Forderung an die Aufgabenstellung: Die Aufgaben sollten so beschaffen sein, dass sie auch in die symbolische Mathematik hineinführen.“ (Laakmann 2008, S. 49) Das bedeutet, dass auch stoffdidaktische Elemente in die Fortbildung einbezogen werden, um z.B. im Bereich Algebra verstärkt darauf vorzubereiten, die verschiede-

---

[67] "Transition from a traditional mathematics classroom to one where technology is used as an integral part of teaching requires teachers to be prepared to change and to make a commitment to learning to use the technology in an effective manner." (Pierce und Ball 2009, S. 315)

"[...] interaction with a teacher was necessary for meaningful learning to take place. Neither the technology nor children's own explorations were sufficient for conceptual learning [...]." (Olive und Lobato 2008, S. 44)

[68] - "teacher [...] advised students on programs available to download onto calculators."
- "one student in [...] class found downloadable programs for the CAS and beame the CAS expert in the class [...]."- learning "to use CAS through the teacher demonstrating procedures using the overhead projector [...]."
- "[...] CAS advice provided by the research team in a booklet provided to students and teachers."
- in another study: "[...] most learning about calculators occurred outside the classroom rather than through teacher instruction." (Ball und Stacey 2005c, S. 127)

nen Aspekte und Vorstellungen zu Variablen und algebraischen Ausdrücken zu erkennen und gezielt zu fördern. Da dies bisher in der traditionellen Ausbildung wenig vermittelt wurde, es andererseits aber hilft, den Sinn von Algebra zu vermitteln und algebraische Fertigkeiten verstehensorientiert zu lehren, ist dies immens wichtig. Dazu sollten in der Fortbildung exemplarische Aufgabenformate und ebenso Schülerlösungen sowie mögliche unterrichtliche Realisationen vorgestellt, analysiert und diskutiert werden.[69]

- Die Notwendigkeit der unterrichtlichen Realisation von rechnerfreien Phasen im Unterricht sollte aufgezeigt werden, um rechnerfreie Kompetenzen gezielt zu fördern. Zum Beispiel sollten dazu Phasen von Kopfmathematik bewusst und systematisch einbezogen werden, um die rechnerfreien Fertigkeiten zu entwickeln und zu vertiefen. Dies sollte keineswegs nur auf „Kopfrechnen“ reduziert bleiben, sondern sich auch auf alle Bereiche der Mathematik beziehen. (Pinkernell und Streit 2011) und (Weber 2010) zeigen hier gute Wege auf, wie Kopfmathematik und Vorstellungsübungen nicht nur für die Arithmetik, sondern auch für die Algebra, Geometrie und Analysis eine gute Basis bieten, rechnerfreie Basiskompetenzen und Vorstellungen zu intensivieren.
- Auf mögliche Probleme beim Unterrichten mit CAS sollte bewusst vorbereitet werden und aufgezeigt werden, wie man adäquat darauf reagieren und sie insbesondere als Lernchance nutzen kann (Drijvers 2002, S. 227–228) . Dazu gehören z.B.:
    - die Schwierigkeit der Entscheidung, ob CAS genutzt werden soll oder nicht,
    - das oft schwierige Wechselspiel zwischen Rechnerarbeit und Papier-und-Bleistift,
    - Schwierigkeiten beim Verstehen des Rechnerergebnisses (z.B. weil der Rechner viele Schritte „überspringt“) (Bossé und Nandakumar 2004, S. 302),
    - Schwierigkeiten beim Verstehen von Fehlermeldungen.
- Im Idealfall erleben Lehrpersonen und zukünftige Lehrerinnen und Lehrer den Wert des CAS beim eigenen Mathematiklernen. Deshalb sollten in der Fortbildung auch immer interessante mathematische Aufgaben integriert sein, die den Spaß an der Mathematik zusammen mit dem Wert des CAS erleben lassen.
- Zusammen mit den Lehrerinnen und Lehrern muss ein Bewusstsein geschaffen werden für die entstehende Problematik bei der schriftlichen Kommunikation, wenn

[69] "We believe that an appropriate strategy for identifying conceptual understanding of algebra is to look for tasks that would promote explanations both with and without the use of technology." (Kieran und Yerushalmy 2004, S. 144)

CAS eingesetzt werden.[70] Lehrerinnen und Lehrer müssen für sich selbst und damit für die Schülerinnen und Schüler Klarheit gewinnen, wie genau schriftliche Dokumente im Unterricht verfasst sein müssen, inwiefern Rechnersprache integriert sein kann oder nicht. Wichtig sind dabei zwei Aspekte: Für den Lernprozess muss es möglich sein, dass Schülerinnen und Schüler zu Beginn beim spontanen Aufschreiben für sich selbst eine Mischung aus eigener Sprache, Rechnersprache und mathematischer Sprache verwenden können. Die konsolidierte mathematische Notation steht am Ende des Lernprozesses und sollte trotz Rechnersprache vermittelt werden. Bei allem sollten sowohl digitale oder als auch Papierdokumente oder Mischformen zugelassen werden – denn auch hier sollten Schülerinnen und Schüler lernen „medienkompetent“ zu arbeiten.

- Die Fortbildungen sollte die Vorbereitung auf schriftliche Prüfungen und deren Korrektur beinhalten: „[Es bestehen] große Unsicherheiten sowohl bei der Erstellung von Prüfungsaufgaben als auch bei der Bewertung der Lösungen.“ (Bichler 2007, S. 101) Die Frage der Art der Dokumentation ist insbesondere für schriftliche Examina von großer Bedeutung. Auch sind organisatorische Fragen beim Einsatz von CAS-Taschencomputern in Klausuren und im Abitur zu regeln: z.B. Muss der Rechner vor Klausuren einem Reset unterzogen werden? (Langlotz et al. 2007, S. 85) Wie wird das gleichzeitige Erfragen von rechnerfreien und rechnerintegrierten Klausurteilen geregelt? In der Vorbereitung darauf muss auch geklärt werden, welche Zwischenschritte in die Dokumentation aufgenommen werden müssen[71].

- Neue Prüfungsformate sollten ebenfalls Inhalt von Fortbildung sein und gemeinsam mit Lehrpersonen entwickelt sowie konkretisiert werden.

Wichtig bei jeglicher Fortbildung ist, dass die eigenen Einstellungen der Lehrerinnen und Lehrer zum Lernen und Lehren mit überdacht und reflektiert werden. Nur wenn die einzelne Lehrkraft über den eigenen Unterrichtsstil bewusst nachdenkt, kann er verändert werden[72]. Dazu ist es bedeutsam, dass es in der Fortbildung nicht nur um die Bedienung des Rechners und um Aufgaben als zentrale Bausteine im Mathematikunterricht geht, sondern dass auch mögliche Schülerreaktionen oder Lösungsbeispiele von Schülerinnen und Schülern einbezo-

[70] "[...] as experience of CAS syntax and the differences between brands grew during the year, they became more aware that students needed explicit guidance about what calculator language was acceptable in written work." (Ball und Stacey 2005b, S. 119)

"Learning to communicate mathematics must have a different emphasis in the curriculum." (Thomas et al. 2004, S. 172)

[71] "[...] when many solution paths are available for a given problem, an unspecified intermediate result may not arise [...]. This need for greater explicitness by assessors is now widely recognized in the literature on adapting examinations for CAS use." (Ball und Stacey 2003, S. 297)

[72] "[...] professional development for teachers needs to address attitudes and perceptions as well as technological skill development. " (Pierce und Ball 2009, S. 315)

gen und besprochen werden. Empfehlungen zur unterrichtlichen Umsetzung müssen erarbeitet, diskutiert und gemeinsam entwickelt werden[73].

6.2.4) Zu Netzwerken

Netzwerke von Lehrern sollten auf struktureller Ebene geschaffen werden, damit Lehrpersonen auch dauerhaft durch die gemeinsame Reflexion und die Weiterentwicklung von Unterricht unterstützt werden. Dazu kann das bereits bestehende gute Moderatorensystem in Thüringen genutzt werden und sollte durch weiterhin jährliche Moderatoren-Fortbildungen die Kontinuität und Qualität der Weiterentwicklung sichern. Eventuell lassen sich spezielle Betreuungssysteme für Lehrpersonen aufbauen oder Gruppen bilden, um die Zusammenarbeit zu fördern. Hierzu könnte auch der Aufbau einer Website mit Foren beitragen, um frühzeitig auf Unsicherheiten und Unzufriedenheiten von Lehrkräften reagieren zu können. Hier könnten neben Unterrichtsmaterialien auch Materialien für Elternabende bereitgestellt werden, um Eltern bewusst einzubeziehen und ausreichend zu informieren.

Fortbildungen sollten ein freiwilliges Angebot bleiben und durch ihre Struktur und ihr Angebot motivierend wirken. Die ideale Struktur einer Fortbildungssequenz könnte so aussehen:

1) Präsenzveranstaltung (1-2 Tage, mindestens ein Ganztag, im besten Fall 1,5 Tage, um informelle Treffen zur Netzwerkbildung nutzen zu können)
2) weitere Präsenzveranstaltung nach 1-2 Monaten (z.B. Halbtag)
3) regelmäßige Treffen (z.B. als Stammtisch alle 2 Monate) zum Austausch von Ideen, Besprechen von Problemen, Entwicklung neuer Idee etc. auch für erfolgreiche Elternarbeit.

Ergänzend zu den Netzwerken für die Lehrerinnen und Lehrer sollte es auch Internetangebote für Schülerinnen und Schüler geben, z.B. Applets und andere Informationen zur Rechnerbedienung, da es sich vor allem in den australischen Studien gezeigt hat, dass solche Angebote vielfach genutzt werden. Sinnvoll könnte eventuell auch die Einrichtung einer AG sein, in der die Schüler ihre Erkenntnisse austauschen können.

6.2.5) Zu den Rahmenbedingungen

Klare und transparente strukturelle Rahmenbedingungen sind für die Handlungssicherheit bei der Integration neuer Medien für Lehrpersonen im Unterrichtsalltag essentiell. Dazu gehören neben den klaren Vorgaben in Curriculum und Prüfung wesentlich auch organisatorische Richtlinien als Unterstützung. Dies gilt vor allem bei der oben geäußerten Empfeh-

73 "Adopting technology to support teaching and learning requires teachers to change their teaching practices." (Pierce und Ball 2009, S. 299)

lung, die Integration von CAS im Mathematikunterricht aktuell durch Handhelds zu realisieren. Lehrpersonen sollten klare und möglichst einheitliche Modelle der Finanzierung und Organisation der Beschaffung solcher Geräte angeboten bekommen. Ein möglicher Weg wurde z.B. im Land Brandenburg im Zusammenhang mit dem „Schüler Bafög“ erarbeitet.

7) Zusammenfassung und Schluss

Die Arbeit an einer solch umfassenden Expertise lässt einmal mehr die Faszination der Universalität von Mathematik durchscheinen. Trotz der verschiedenen Kulturen können wir international als Mathematiklehrende und –forschende in Schule und Hochschule kooperieren und Erfahrungen austauschen. Sowohl die Inhalte des Unterrichtsfaches Mathematik sind uns gemeinsam als auch die Standard- und Kompetenzformulierung in den einzelnen Ländern, die eine große Deckungsgleichheit aufweisen. So verwundert es nicht, dass die Frage nach einer sinnvollen Integration von CAS in den verschiedenen Ländern sehr ähnlich angegangen und erforscht wird. Bei allen einbezogenen Studien standen insgesamt zwei Ziele im Vordergrund: Zum einen ging es darum, die Lernprozesse beim Lernen mit CAS zu verstehen und zu erkunden und zum anderen sollten sinnvolle Wege für einen rechnerintegrierten Unterricht aufgezeigt und evaluiert werden.

Die Studien sprechen eine klare und eindeutige Sprache: Trotz der vielfältigen Probleme, die die Komplexität des CAS mit sich bringt und potenziell Schwierigkeiten für Lehrende wie Lernende entstehen können, sind die Vorteile eines CAS-Einsatzes immens. CAS kann als Katalysator wirken für einen schülerzentrierten und verstehensorientierten Unterricht. Die zentralen Ergebnisse fokussieren die Lernmöglichkeiten, die beim Umgang mit CAS entstehen, die dabei geförderten Kompetenzen und daraus entstehende Änderungen der fachlichen Unterrichtsziele, z.B.:

- Der Erwerb konzeptuellen Wissens kann durch CAS gefördert werden. Dies wird vor allem in den Themengebieten Algebra und Funktionenlehre an vielfältigen Beispielen aufgezeigt.
- Rechnerfreie Fertigkeiten sind auch beim CAS-gestützten Unterricht zu erwerben und verlieren ihre Bedeutung nicht. Fertigkeiten, im Kopf oder auf Papier ausgeführt, sind bewusst anzuregen und in den Lernprozess zu integrieren.
- Die Nutzung mathematischer Sprache in der schriftlichen Kommunikation wird durch CAS angeregt. Ein Rechner zwingt in neuer Weise dazu, sich mit mathematischer Notation und Schreibweisen auseinanderzusetzen. Dies birgt Schwierigkeiten aber auch Lernchancen, algebraische Ausdrücke vertieft zu verstehen.
- Die Integration offener und realitätsbezogener Aufgaben in den Unterricht wird durch CAS unterstützt, da verschiedene Lösungswege vielfältig unterstützt werden, realistische Daten verarbeitet werden und der Fokus weniger auf der Durchführung eines Kalküls sondern vielmehr auf die Wahl der mathematischen Befehle und der Interpretation der Ergebnisse liegt.
- Die CAS-Integration zwingt zum Nachdenken über Aufgaben und Wege im Unterricht und ermöglicht, dass lehrer- und schülerzentrierte Unterrichtsmethoden in neuem Licht gesehen werden können.

Diese Effekte werden nicht allein per se durch die Anwesenheit der Technologie erzielt, sondern das Potenzial des Mediums kann nur durch die einzelne Lehrkraft entfaltet werden sowie durch die entsprechende inhaltliche und methodische Gestaltung des Unterrichts.

Der angemessene Rahmen, den Politik und Administration bieten können, ist gekennzeichnet durch Klarheit und Unterstützung. Klarheit in Form eindeutiger Rahmenbedingungen und Unterstützung durch effiziente Systeme der Fortbildung und Netzwerkbildung. Insofern kristallisieren sich die Erkenntnisse der Expertise aufgrund der Recherche in den folgenden fünf Gelingensbedingungen:

4) CAS sollte verpflichtend im Curriculum eingebunden sein.
5) CAS sollte verbindlich im Abitur verankert sein.
6) Lehrerbildung muss gestärkt werden als Motor der Veränderung.
7) Stärkende Netzwerke für Eltern, Lehrer und Schüler müssen aufgebaut werden.
8) Strukturelle Rahmenbedingungen müssen geklärt werden.

Ein Aspekt fand sich in den Studien nur am Rande, der aber dennoch wichtig erscheint und nicht nur die Diskussion um den CAS-Einsatz in Deutschland beeinflusst: Es ist die Diskussion zwischen universitärer und schulischer Mathematik, die Challis und Gretton (2002) als eher „unleicht" weltweit beschreiben:

> „It is indeed unfortunate that the relationship between university mathematics and the world of mathematical education generally is uneasy across the world." (Challis und Gretton 2002, S. 155)

Diese Diskussion wird lokal in Fragen des CAS-Einsatzes sehr pointiert geführt. Insofern ist die neue Annäherung sehr zu begrüßen, die sich derzeit in der Gründung einer Schnittstellengruppe manifestiert. Es ist eine Gruppe mit Vertretern der Deutschen Mathematikervereinigung (DMV), der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) und des Vereins für Mathematisch-Naturwissenschaftliche Bildung (MNU) mit dem Ziel, die Probleme an den Schnittstellen zwischen Schule und Hochschule gemeinsam anzugehen. Dabei geht es sowohl um die Übergänge von der Schule zur Hochschule (dann als Studierender) als auch um die Übergänge von Hochschulen zur Schule (dann als Lehrkraft).

Bereits in der gemeinsamen Empfehlung zum Einsatz neuer Technologien haben sich die Verbände (hier MNU und GDM) angenähert und eine klare Empfehlung ausgesprochen zum verbindlichen Einsatz neuer Technologien (u.a. CAS)[74].

Die Arbeit an einer solchen Expertise eröffnet noch ein neues bereicherndes Kooperationsfeld: die Zusammenarbeit mit Politik und Administration. Darin liegt eine Chance, die genutzt werden sollte, denn Politik und nicht nur Wissenschaft und Praxis verfolgen dasselbe Ziel, den Mathematikunterricht zu verbessern und für die Lehrpersonen zu erleichtern. Dabei

[74] Vgl. http://madipedia.de/images/4/40/Stellungnahme-GDM-MNU-2010.pdf, Stand: 06.01.2011

sind die verschiedenen Perspektiven der einzelnen Bereiche ausgesprochen hilfreich und nützlich.

Diese Perspektiven ermöglichen z.B. dieser Expertise ganz neue Sichtweisen und Einblicke, die sich aus der Analyse und Betrachtung der mannigfaltigen Studien, Gedanken und Veröffentlichungen ergeben. Neue Aspekte und Erkenntnisse mischen sich mit bekannten aus eigenen Studien oder Erfahrungen aus dem Unterricht. Schwierigkeiten und Probleme konfigurieren sich noch einmal und in anderem Licht. Eine lohnende, spannende Arbeit: Allen Mitwirkenden sei Dank für die guten Gespräche und Diskussionen beim Ringen um eine Ordnung der zunächst unüberschaubaren Fülle an Aspekten und der Aufgabe, eine Struktur zu finden als Grundlage einer fundierten Empfehlung.

Besonderer Dank gilt natürlich dem Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur in Thüringen, das diese Expertise überhaupt ermöglicht hat.

Literaturverzeichnis

Primärquellen

Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 41. GDM Tagung für Didaktik der Mathematik (2007). Hildesheim: Franzbecker.

Abdullah, Lazim M. (2007): Procedural Knowledge in the Presence of a Computer Algebra System (CAS): Rating the Drawbacks Using a Multi-factorial Evaluation Approach. In: *The International Journal on Mathematics Education (ZDM Mathematics Education)* 14 (1), S. 14–20.

Aldon, Gilles (2010): Handheld calculators between instument an document. In: *The International Journal on Mathematics Education (ZDM Mathematics Education)* 42 (7), S. 733–745.

Arnold, Stephen (2004): Classroom Computer Algebra. Some issues and approaches. In: *Australian Mathematics Teacher* 60 (2), S. 17–21.

Artigue, Michèle (2002): Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. In: *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7 (3), S. 245–274.

Artigue, Michèle (2004): The integration of computer technologies in secondary mathematics education. In: Wang Jianpan et al. (Hg.): Trends and challenges in mathematics education. Shanghai: East China Normal University Press, S. 209–222.

Ball, Lynda (2004): Researchers and teachers working together to deal with the issues, opportunities and challenges of implementing CAS into the senior secondary mathematics classroom. In: *The International Journal on Mathematics Education (ZDM Mathematics Education)* 36 (1), S. 27–31.

Ball, Lynda; Pierce, Robyn; Stacey, Kaye (2003): Recognising equivalent algebraic expressions: An important component of algebraic expectation for working with CAS. In: Neil A. et al Pateman (Hg.): Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA, Bd. 4, S. 15–22.

Ball, Lynda; Stacey, Kaye (2005a): Teaching strategies for developing judicious technology use. In: William J. et al Masalski (Hg.): Technology-supported mathematics learning environments. Sixty-seventh yearbook. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, S. 3–15.

Ball, Lynda; Stacey, Kaye (2004): A new practice evolving in learning mathematics: Differences in students' written records with CAS. In: Marit et al Johnsen Høines (Hg.): Proceedings of the 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. PME 28, Bergen, Norway, July 14–18, 2004, Bd. 2. Bergen: Bergen University College, S. 87–94.

Ball, Lynda; Stacey, Kaye (2003): What Should Students Record When Solving Problems with CAS? Reasons, Information, the Plan, and Some Answers. In: James T. Fey, Al Cuoco, Carolyn Kieran, Lin McMullin und Rose Mary Zbiek (Hg.): Computer algebra systems in secondary school mathematics education. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, S. 289–304.

Ball, Lynda; Stacey, Kaye (2005b): Good CAS written records. Insight from teachers. In: H. L. et al Chick (Hg.): Proceedings of the 29th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. PME 29, Melbourne, Australia, July 10–15, 2005, Bd. 2. 4 Bände. Melbourne: University of Melbourne, Dep. of Science and Mathematics Education, S. 113–120.

Ball, Lynda; Stacey, Kaye (2005c): Students' views on using CAS in senior mathematics. In: Philip et al Clarkson (Hg.): MERGA 28 - 2005. Building connections: Theory, research and practice. 2 Bände, S. 121–128.

Barzel, Bärbel (2004): Warum gehören "neues Lernen" und "neue Medien" im Mathematikunterricht zusammen? In: *Mathematikunterricht (Seelze)* 50 (3), S. 52–62.

Barzel, Bärbel (2006a): Mathematik zwischen Konstruktion und Instruktion. Evaluation einer Lernwerkstatt 11 Jahrgang mit integriertem Einsatz Computeralgebra. Dissertation. Universität Duisburg-Essen. Online verfügbar unter http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-14643/DissertationBarzel.pdf, zuletzt geprüft am 13.09.2010.

Barzel, Bärbel (2006b): Mathematikunterricht zwischen Konstruktion und Instruktion: Evaluation einer Lernwerkstatt im 11. Jahrgang mit integriertem Rechnereinsatz. In: *Journal für Mathematik-Didaktik (JMD)* 27 (3-4), S. 321–322.

Barzel, Bärbel (2007): "New technology? New ways of teaching – No time left for that!". In: *International Journal for Technology in Mathematics Education* 14 (2), S. 77–86.

Bauer, Karolin; Tschacher, Karel (2006): Mathematisches Repetitorium und CAS. In: Computeralgebra in Lehre, Ausbildung und Weiterbildung V - Entdecken, üben, prüfen mit Computeralgebra, neue Entwicklungen an Schule und Hochschule. Tagungsband. Fachgruppe Computeralgebra der DMV, GAMM und GI, S. 11–20.

Baumert, J.; Kunter, M.; Blum, W.; Brunner, M.; Voss, T.; Jordan, A. et al. (2010): Teachers' Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress. J 2010; 47; 133 originally published online Oct 19, 2009. In: *American Educational Research Journal* 47 (1), S. 133–180. Online verfügbar unter http://aer.sagepub.com/cgi/content/abstract/47/1/133.

Beaudin, M.; Bowers, D. (1997): Logistics for facilitating CAS instruction. In: J. Monoghan J. Berry, M. Kronfellner und B. Kutzler (Hg.): The State of Computer Algebra in Mathematics Education: Chartwell Bratt, S. 126–135.

Bichler, Ewald (2007): Computer und Prüfungen – geht CAS auch? Erfahrungen aus dem bayerischen Modellversuch. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 41. GDM Tagung für Didaktik der Mathematik. Hildesheim: Franzbecker, S. 98–101.

Bichler, Ewald (2010): Explorative Studie zum langfristigen Taschencomputereinsatz im Mathematikunterricht. Der Modellversuch Medienintegration im Mathematikunterricht (M3) am Gymnasium. Univ., Diss.--Würzburg, 2010. Hamburg: Kovac (Schriftenreihe Didaktik in Forschung und Praxis, 52). Online verfügbar unter http://www.verlagdrkovac.de/978-3-8300-5306-4.htm.

Blum, W.; Leiß, D. (2005): Modellieren im Unterricht mit der "Tanken"-Aufgabe. In: *Mathematik lehren* (128), S. 18–21.

Böhm, Josef; Forbes, Ian; Herweyers, Guido; Hugelshofer, René; Schomacker, Gert (2004): The case for CAS. Münster: Westfälische Wilhelms-Universität Münster.

Bossé, Michael J.; Nandakumar, N. R. (2004): Computer Algebra Systems, Pedagogy, and Epistemology. In: *Mathematics and Computer Education* 38 (3), S. 298–306.

Bradford, Russel; Davenport, James H.; Sangwin, Chris (2009): A Comparision of Equality in Computer Algebra and Correctness in Mathematical Pedagogy (II). In: *International Journal for Technology in Mathematics Education* 17 (2), S. 93–98.

Brown, Roger (2003): Computer Algebra Systems and Mathematics Examinations: a comparative study. In: *The Internation Journal of Computer Algebra in Mathematics Education* 10 (3), S. 155–182.

Bruder, Regina; Ingelmann, Maria (2009): CAliMERO aus Sicht der Forschenden. In: *Mathematikunterricht (Seelze)* 55 (4), S. 13–19.

Burkhardt, Werner (2003): Wie viel CAS braucht der Mensch? In: *Computeralgebra - Rundbrief* 32, S. 22–23.

Challis, Neil; Gretton, Harry (2002): Expressive and explicit CAS - is it enough? In: *The Internation Journal of Computer Algebra in Mathematics Education* 9 (2), S. 155–166.

Chevallard, Y. (1999): L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. In: *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19, S. 221–266.

Clements, Douglas H.; Burns, Barbara A. (2000): Students' development of strategies for turn and angle measure. In: *Educational Studies in Mathematics* 41 (1), S. 31–45.

Clements, Douglas H.; Sarama, Julie; Yelland, Nicola J.; Glass, Brad (2008): Learning and Teaching Geometry with Computers in the Elementary and Middle School. In: M. Kathleen Heid und Glendon W. Blume (Hg.): Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Syntheses, Cases, and Perspectives. Research Syntheses. 2 Bände. Charlotte, North Carolina: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1), S. 109–154.

Cuoco, Al; Levasseur, Ken (2003): Classical Mathematics in the Age of CAS. In: James T. Fey, Al Cuoco, Carolyn Kieran, Lin McMullin und Rose Mary Zbiek (Hg.): Computer algebra systems in secondary school mathematics education. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, S. 97–116.

Dekker, Truus (2007): A Model for constructing Higher Level Classroom Assessments. In: *Mathematics Teacher* 101 (1), S. 56–61.

Doerr, Helen M.; Pratt, Dave (2008): The Learning of Mathematics and Mathematical Modeling. In: M. Kathleen Heid und Glendon W. Blume (Hg.): Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Syntheses, Cases, and Perspectives. Research Syntheses. 2 Bände. Charlotte, North Carolina: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1), S. 259–285.

Drijvers, Paul (2002): Learning mathematics in a computer algebra environment: obstacles are opportunities. In: *The International Journal on Mathematics Education (ZDM Mathematics Education)* 34 (5), S. 221–228.

Drijvers, Paul (2003): Algebra on Screen, on Paper, and in the Mind. In: James T. Fey, Al Cuoco, Carolyn Kieran, Lin McMullin und Rose Mary Zbiek (Hg.): Computer algebra systems in secondary school mathematics education. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, S. 241–268.

Drijvers, Paul (2004a): Learning algebra in a computer algebra environment. In: *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education* 11 (3), S. 77–89.

Drijvers, Paul (2004b): Learning algebra in a computer algebra environment. Summary of the PhD thesis. Online verfügbar unter http://www.fi.uu.nl/~pauld/dissertation/summary-site.pdf, zuletzt geprüft am 11.11.2010.

Drijvers, Paul; Trouche, Luc (2008): From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. In: M. Kathleen Heid und Glendon W. Blume (Hg.): Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Syntheses, Cases, and Perspectives. Research Syntheses, Bd. 1. 2 Bände. Charlotte, North Carolina: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1), S. 363–391.

Duncan, Allan Graham (2010): Teachers' views on dynamically linked multiple representations, pedagogical practices and students' understanding of mathematics using TI-Nspire in Scottish secondary schools. In: *The International Journal on Mathematics Education (ZDM Mathematics Education)* 42 (7), S. 763–774.

Edwards, Michael Todd (2003): Calculator-Based Computer Algebra Systems: Tools for Meaningful Algebraic Understanding. In: James T. Fey, Al Cuoco, Carolyn Kieran, Lin McMullin und Rose Mary Zbiek (Hg.): Computer algebra systems in secondary school mathematics education. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, S. 117–135.

Fey, James T.; Cuoco, Al; Kieran, Carolyn; McMullin, Lin; Zbiek, Rose Mary (Hg.) (2003): Computer algebra systems in secondary school mathematics education. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Freudenthal, Hans (1973): Mathematik als pädagogische Aufgabe. Stuttgart: Klett (Klett-Studienbücher. Klett-Studienbücher Mathematik).

Goldenberg, E. Paul (2003): Algebra and Computer Algebra. In: James T. Fey, Al Cuoco, Carolyn Kieran, Lin McMullin und Rose Mary Zbiek (Hg.): Computer algebra systems in secondary school mathematics education. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, S. 9–32.

Greefrath, Gilbert (2007): Computeralgebrasysteme und Prüfungen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 41. GDM Tagung für Didaktik der Mathematik. Hildesheim: Franzbecker, S. 55–58.

Hefendehl-Hebeker, Lisa (2008): Wege zur Formelsprache – Entwicklung algebraischen Denkens als didaktische Aufgabe. In: *Unikate* (33), S. 66–71.

Heid, M. Kathleen (2003): Theories for Thinking about the Use of CAS in Teaching and Learning Mathematics. In: James T. Fey, Al Cuoco, Carolyn Kieran, Lin McMullin und Rose Mary Zbiek (Hg.): Computer algebra systems in secondary school mathematics education. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, S. 33–52.

Heid, M. Kathleen (2005): Technology in Mathematics Education: Tapping into Visions of the Future. In: William J. et al Masalski (Hg.): Technology-supported mathematics learning environments. Sixty-seventh yearbook. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, S. 345–366.

Heid, M. Kathleen; Blume, Glendon W. (Hg.) (2008a): Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Syntheses, Cases, and Perspectives. Research Syntheses. 2 Bände. Charlotte, North Carolina: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1).

Heid, M. Kathleen; Blume, Glendon W. (2008b): Algebra and Function Development. In: M. Kathleen Heid und Glendon W. Blume (Hg.): Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Syntheses, Cases, and Perspectives. Research Syntheses. 2 Bände. Charlotte, North Carolina: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1), S. 55–108.

Heid, M. Kathleen; Blume, Glendon W. (2008c): Technology and the Teaching and Learning of Mathematics. In: M. Kathleen Heid und Glendon W. Blume (Hg.): Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Syntheses, Cases, and Perspectives. Research Syntheses. 2 Bände. Charlotte, North Carolina: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1), S. 419–431.

Heinrich, Rainer (2007): Grafikfähige Taschencomputer in zentralen Prüfungen - Chancen und Risiken. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 41. GDM Tagung für Didaktik der Mathematik. Hildesheim: Franzbecker, S. 86–89.

Herold, Raja; Barzel, Bärbel (2008): Übersicht der deutschsprachigen Artikel über die Integration von Taschenrechnern im Mathematikunterricht 2000-2008. Freiburg.

Heugl, H.; Klinger, W.; Lechner, J. (1998): Mathematikunterricht mit Computeralgebra- Systemen. Ein didaktisches Lehrbuch mit Erfahrungen aus dem österreichischen DERIVE-Projekt. München: Addison-WEsley.

Heuß, Jörg (2006): Mit Kopf und Knopf - Mathematikunterricht mit CAS in Baden-Württemberg (BS). In: Computeralgebra in Lehre, Ausbildung und Weiterbildung V - Entdecken, üben, prüfen mit Computeralgebra, neue Entwicklungen an Schule und Hochschule. Tagungsband. Fachgruppe Computeralgebra der DMV, GAMM und GI, S. 49–55.

Hiebert, J.; Carpenter, T. (1992): Learning and teaching with understanding. In: D. Grouws (Hg.): Handbook of research on mathematics research and teaching. New York: MacMillan, S. 65–100.

Hollebrands, Karen; Laborde, Colette; Sträßer, Rudolf (2008): Technology and the learning of geometry at the secondary level. In: M. Kathleen Heid und Glendon W. Blume (Hg.): Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Syntheses, Cases, and Perspectives. Research Syntheses, Bd. 1. 2 Bände. Charlotte, North Carolina: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1), S. 155–206.

Hoyles, Celia; Lagrange, Jean-Baptiste (Hg.) (2010): Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study. New York: Springer Science and Business Media.

Ingelmann, Maria (2009): Evaluation eines Unterrichtskonzeptes für einen CAS-gestützten Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Dissertation. Berlin: Logos Verlag.

Kendal, Margaret; Stacey, Kaye (2001): The Impact of Teacher Privileging on Learning Differentiation with Technology. In: *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 6 (2), S. 143–165.

Kieran, Carolyn (2007): Interpreting and assessing the answers given by the CAS expert: A reaction paper. In: *International Journal for Technology in Mathematics Education* 14 (2), S. 103–107.

Kieran, Carolyn; Saldanha, Luis (2005): Computer algebra systems (CAS) as a tool for coaxing the emergence of reasoning about equivalence of algebraic expressions. In: H. L. et al Chick (Hg.): Proceedings of the 29th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. PME 29, Melbourne, Australia, July 10–15, 2005, Bd. 3. 4 Bände. Melbourne: University of Melbourne, Dep. of Science and Mathematics Education, S. 193–200.

Kieran, Carolyn; Damboise, Caroline (2007): "How can we describe the relation between the factored form and the expanded form of these trinomials? – We don't even know if our paper-and-pencil factorizations are right": the case for computer algebra systems (CAS) with weaker algebra students. In: Jeong-Ho et al Woo (Hg.): Proceedings of the 31st annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. PME, Seoul, Korea, July 8–13, Bd. 3. 4 Bände. Seoul: The Korea Society of Educational Studies in

Mathematics, S. 105–112.

Kieran, Carolyn; Yerushalmy, Michal (2004): Research on the role of technological environments in algebra learning and teaching. In: Kaye Stacey, Helen Chick und Margaret Kendal (Hg.): The future of the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI study. Boston: Kluwer Acad. Publ. (New ICMI studies series, 8), S. 99–152.

Kieran, Carolyn; Drijvers, Paul (2006): The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: a study of cas use in secondary School algebra. In: *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 11 (2), S. 205–263.

Kutzler, Bernhard (2003): CAS as Pedagogical Tools for Teaching and Learning Mathematics. In: James T. Fey, Al Cuoco, Carolyn Kieran, Lin McMullin und Rose Mary Zbiek (Hg.): Computer algebra systems in secondary school mathematics education. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, S. 53–72.

Laakmann, Heinz (2008): Multirepräsentationsprogramme im Mathematikunterricht. In: *Mathematikunterricht (Seelze)* 54 (6), S. 44–49.

Lagrange, Jean-Baptiste (2003): Learning Techniques and Concepts Using CAS: A Practical and Theoretical Reflection. In: James T. Fey, Al Cuoco, Carolyn Kieran, Lin McMullin und Rose Mary Zbiek (Hg.): Computer algebra systems in secondary school mathematics education. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, S. 269–285.

Lagrange, Jean-Baptiste (2007): Didactic time, epistemic gain and consistent tool: Taking care of teachers' needs for classroom use of CAS. In: *International Journal for Technology in Mathematics Education* 14 (2), S. 87–94.

Lagrange, Jean-Baptiste; Artigue, Michèle; Laborde, Colette; Trouche, Luc (2003): Technology and Mathematics Education: A Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation. In: A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick und F. K. S. Leung (Hg.): Second International Handbook of Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, S. 237–269.

Langlotz, Hubert; Moldenhauer, Wolfgang; Zappe, Wilfried (2007): Thüringen - 5 Jahre Zentralabitur mit einem Taschencomputer - Bilanz und Ausblick. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 41. GDM Tagung für Didaktik der Mathematik. Hildesheim: Franzbecker, S. 82–85.

Lehmann, Eberhard (2002): Mathematikunterricht mit Parametern. Unterrichtsmaterialien Sekundarstufe I. Hannover: Schroedel.

Leng, Ng Wee (2003): Effects of Computer Algebra System on Secondary Students' Achievement in Mathematics: A Pilot Study in Singapore. In: *The Internation Journal of Computer Algebra in Mathematics Education* 10 (4), S. 235–250.

Malle, Günther (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Braunschweig/ Wiesbaden: Vieweg.

Masalski, William J. et al (Hg.) (2005): Technology-supported mathematics learning environments. Sixty-seventh yearbook. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

McCallum, William G. (2003): Thinking out of the Box. In: James T. Fey, Al Cuoco, Carolyn Kieran, Lin McMullin und Rose Mary Zbiek (Hg.): Computer algebra systems in secondary school mathematics education. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, S. 73–86.

Neill, Alex (2009): Key Findings From the CAS Pilot Programme. In: *The New Zealand Mathematics Magazine* 46 (1), S. 14–27.

Noss, Richard; Hoyles, Celia (1992): Afterword: Looking back and looking forward. In: Richard Noss und Celia Hoyles (Hg.): Learning mathematics and Logo. Cambridge, MA: MIT Press, S. 427–468.

Olive, John; Lobato, Joanne (2008): The Learning of Rational Number Concepts using Technology. In: M. Kathleen Heid und Glendon W. Blume (Hg.): Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Syntheses, Cases, and Perspectives. Research Syntheses, Bd. 1. 2 Bände. Charlotte, North Carolina: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1), S. 1–53.

Özgün-Koca, S. Asli (2010): Prospective teachers' views on the use of calculators with Computer Algebra System in algebra instruction. In: *Journal of Mathematics Teacher Education* 13 (1), S. 49–71.

Pallack, Andreas (2007a): Die gute CAS-Aufgabe für die Prüfung. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 41. GDM Tagung für Didaktik der Mathematik. Hildesheim: Franzbecker, S. 90–93.

Pallack, Andreas (2007b): Mit CAS zum Abitur. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 41. GDM Tagung für Didaktik der Mathematik. Hildesheim: Franzbecker, S. 43–46.

Pallack, Andreas (2008:): Abitur – solving by clicking? In: *Mathematik lehren* (146), S. 54–58.

Pierce, Robyn; Ball, Lynda; Stacey, Kaye (2009): Is it worth using CAS for Symbolic Algebra Manipulation in the Middle secondary years? Some Teachers' Views. In: *International Journal of Science and Mathematics Education* 7 (6), S. 1149–1172.

Pierce, Robyn; Ball, Lynda (2009): Perceptions that may affect teachers' intention to use technology in secondary mathematics classes. In: *Educational Studies in Mathematics* 71 (3), S. 299–317.

Pinkernell, Guido; Streit, Christine (2011): Kopfmathematik. In: *Mathematik lehren* (167), S. 8–12.

Sarama, Julie; Clements, Douglas H.; Henry, Julie Jacobs (1998): Network of influences in an implementation of a mathematics curriculum innovation. In: *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 3 (2), S. 113–148.

Schmidt, Karsten (2002): The use of CAS in the Thuringian school system: Present and future. In: Manfred Borovcnik und Hermann Kautschitsch (Hg.): Technology in Mathematics Teaching. Proceedings of ICTMT 5 in Klagenfurt 2001. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik. Vienna, S. 67–70.

Schmidt, Karsten (2009): Mathematics Education with a Handheld CAS - The Students' Perspective. In: *International Journal for Technology in Mathematics Education* 17 (2), S. 105–110.

Schmidt, Karsten; Köhler, Anke; Moldenhauer, Wolfgang (2009): Introducing a Computer Algebra System in Mathematics Education - Empirical Evidence from Germany. In: *International Journal for Technology in Mathematics Education* 16 (1), S. 11–26.

Smith, Derek (2006): CAS – a journey has begun in Aotearoa. In: *New Zealand Mathematics Magazine* 43 (2), S. 1–25.

Tharp, M. L.; Fitzsimmons, J. A.; Brown Ayers, R. L. (1997): Negotiating a technological shift: Teacher perception of the implementation of graphing calculators. In: *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching* 16 (4), S. 551–575.

Thomas, Michael O. J.; Monaghan, John; Pierce, Robyn (2004): Computer algebra systems and algebra: curriculum, assessment, teaching, and learning. In: Kaye Stacey, Helen Chick und Margaret Kendal (Hg.): The future of the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI study. Boston: Kluwer Acad. Publ. (New ICMI studies series, 8), S. 155–186.

Wagenschein, Martin (1977): Verstehen lehren. Weinheim: Beltz.

Waits, B. K. (2000): Instead of an introduction. ACDCA Proceedings Portoroz.

Weber, Christof (2010): Mathematische Vorstellungsübungen im Unterricht. Ein Handbuch für das Gymnasium. Seelze-Velber: Klett/Kallmeyer.

Weigand, Hans-Georg (2006): Der Einsatz eines Taschencomputers in der 10. Klassenstufe - Evaluation eines einjährigen Schulversuchs. In: *Journal für Mathematik-Didaktik (JMD)* 27 (2), S. 89–112.

Weigand, Hans-Georg (2008): Teaching with a symbolic calculator in 10th grade – evaluation of a one year project. In: *International Journal for Technology in Mathematics Education* 15 (1), S. 19–32.

Weigand, Hans-Georg; Bichler, Ewald (2009): Der Modellversuch Medienintegration im Mathematikunterricht (M³) an bayerischen Gymnasien. 100. MNU Kongress Regensburg. Online verfügbar unter http://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/weigand/M3_Projekt_Materialien/MNU-Regensburg-2009-Weigand%20Bichler.pdf, zuletzt geprüft am 18.11.2010.

Weigand, Hans-Georg; Bichler, Ewald (2010): Towards a competence model for the use of symbolic calculators in mathematics lessons: the case of functions. In: *The International Journal on Mathematics Education (ZDM Mathematics Education)* 42 (7), S. 697–713.

Wiske, M.; Houde, R. (1993): From recitation to construction: Teachers change with new technologies. In: J. Schwartz, Michal Yerushalmy und B. Wilson (Hg.): The geometric supposer: What is it a case of? Hillsdale, NJ: Erlbaum, S. 193–215.

Woo, Jeong-Ho et al (Hg.) (2007): Proceedings of the 31st annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. PME, Seoul, Korea, July 8–13. 4 Bände. Seoul: The Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

Yerushalmy, Michal (2006): Slower Algebra Students Meet Faster Tools: Solving Algebra Word Problems With Graphing Software. In: *Journal for Research in Mathematics Education* 37 (5), S. 356–387.

Zbiek, Rose Mary (2003): Using Research to Influence Teaching and Learning with Computer Algebra Systems. In: James T. Fey, Al Cuoco, Carolyn Kieran, Lin McMullin und Rose Mary Zbiek (Hg.): Computer algebra systems in secondary school mathematics education. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, S. 197–217.

Zbiek, Rose Mary; Hollebrands, Karen (2008): A Research-Informed View of the Process of Incorporating Mathematics Technology into Classroom Practice by In-Service and Prospective Teachers. In: M. Kathleen Heid und Glendon W. Blume (Hg.): Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Syntheses, Cases, and Perspectives. Research Syntheses. 2 Bände. Charlotte, North Carolina: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1), S. 287–344.

Zehavi, Nurit; Mann, Giora (2003): Task Design in a CAS Environment: Introducing (In)equations. In: James T. Fey, Al Cuoco, Carolyn Kieran, Lin McMullin und Rose Mary Zbiek (Hg.): Computer algebra systems in secondary school mathematics education. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, S. 173–193.

Zeller, Matthias; Barzel, Bärbel (2010): Influences of CAS and GC in early algebra. In: *The*

International Journal on Mathematics Education (ZDM Mathematics Education) 42 (7), S. 775–788.

Sekundärquellen

Beiträge zum Mathematikunterricht (2002). Hildesheim: Franzbecker.

Arnold, Stephen (2004): Mathematics education for the third millennium: Visions of a future for handheld classroom technology. In: Ian et al Putt (Hg.): Mathematics education for the third millennium: Towards 2010. MERGA 27, Bd. 1, S. 16–28.

Baacke, Dieter (1997): Medienpädagogik. Tübingen: Niemeyer.

Barkatsas, Anastasios (2005): A new scale for monitoring students' attitudes to learning mathematics with technology (MTAS). In: Philip et al Clarkson (Hg.): MERGA 28 - 2005. Building connections: Theory, research and practice. 2 Bände, S. 129–136.

Barton, Bill; Irwin, K. C.; Pfannkuch, M.; Thomas, M. O. J. (Hg.) (2002): Mathematics education in the South Pacific. Proceedings of the 25th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Auckland. 2 Bände. Sydney: MERGA.

Barzel, Bärbel (1991): Taylorreihenentwicklung mit Derive. In: *Mathematik betrifft uns* (6).

Barzel, Bärbel (1992): Taylor Series with Derive. In: Josef Böhm (Hg.): Teaching Mathematics with Derive: Chartwell-Bratt, S. 52–58.

Barzel, Bärbel (Hg.) (1995): Tagungsband der Derive Days Düsseldorf: Landesmedienzentrum Rheinland-Pfalz.

Barzel, Bärbel (Hg.) (1996): Teaching with Mathematics with Derive and the TI-92. Proceedings of the International Derive and TI-92 Conference, Schloß Birlinghoven. ZKL-Texte Nr. 2. Münster: ZKL.

Barzel, Bärbel (2000): Ich bin eine Funktion. In: *Mathematik lehren* (98), S. 39–43.

Barzel, Bärbel (2000): Selbsttätiges Lernen – neue Methoden, neues Glück? In: Wilfried Herget, Hans-Georg Weigand und Thomas Weth (Hg.): Standardthemen des Mathematikunterrichts in moderner Sicht. Bericht über die 17. Arbeitstagung des Arbeitskreises in der GDM, September 1999in Wolfenbüttel. Hildesheim: Franzbecker.

Barzel, Bärbel (Hg.) (2001): Anders unterrichten – aber wie? Mathematik Lehren 104. Seelze: Friedrich.

Barzel, Bärbel (2001): Bilder schaffen mit Graphen. In: *Mathematik lehren* (102), S. 12–15.

Barzel, Bärbel (Hg.) (2001): Einstiege. Mathematik Lehren 109. Seelze: Friedrich.

Barzel, Bärbel (2001): Unterricht morgen: Strukturen, Lernumgebungen, Medien. In: *GDM-Mitteilungen* (72), S. 66–71.

Barzel, Bärbel (2001): Welche Medien sind sinnvoll? In: Günther Schmidt und K. Mank (Hg.): Mathematikunterricht im Aufbruch. Tagungsband der 13. MNU-Fachleitertagung für Mathematik, Wald-Amorbach 2001.

Barzel, Bärbel (2002): Drei Chinesen und ein Taschenrechner. In: Wilfried Herget und Eberhard Lehmann (Hg.): Neue Materialien für den Mathematikunterricht mit dem TI-83/89/92 in der Sekundarstufe. I - Quadratische Funktionen. Hannover: Schroedel, S. 24–32.

Barzel, Bärbel (2002): Ich bin eine Funktion. In: Wilfried Herget und Eberhard Lehmann (Hg.): Neue Materialien für den Mathematikunterricht mit dem TI-83/89/92 in der Sekundarstufe. I - Quadratische Funktionen. Hannover: Schroedel, S. 60–70.

Barzel, Bärbel (2002): Vision einer Lernumgebung. In: *Tangente* (14 – II), S. 6–10.

Barzel, Bärbel (2003): MUKI - Teaching mathematics between construction and instruction. Evaluation of a learning workshop to introduce the investigation of polynomial functions with an integrated use of CAS. In: Jean-Baptiste Lagrange (Hg.): Proceedings of the Third CAME Symposium. Learning in a CAS Environment: Mind-Machine Interaction, Curriculum & Assessment. Reims.

Barzel, Bärbel (2004): Teaching mathematics between construction and instruction. Evaluation of a learning workshop to introduce the investigation of polynomial functions with an integrated use of CAS. In: D. de Bock, M. Isoda, J. A. Garcia Cruz, A. Gagatsis und E. Simmt (Hg.): Proceedings of ICME-10 Topic Study Group 2. New developments and trends in secondary mathematics education.

Barzel, Bärbel (2005): Offener Unterricht? Rechner?… Dafür bleibt keine Zeit… Hauptvortrag GMD-Jahrestagung, Bielefeld, März 2005. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*.

Barzel, Bärbel (2005): Open Learning? Computeralgebra …No time left for that… In: *ZDM* 37 (5), S. 336–342.

Barzel, Bärbel (2007): Wie können Lehramtsstudierende auf den Einsatz von Rechnern im Mathematikunterricht vorbereitet werden? In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 41. GDM Tagung für Didaktik der Mathematik. Hildesheim: Franzbecker, S. 47–50.

Barzel, Bärbel (2008): Lernwerkstätten im Mathematikunterricht. In: Anke Wagner (Hg.): Offene Lernangebote und Lernarrangements in der Hauptschule. Tagungsband Hauptschultag an der PH Ludwigsburg, Juni 2008. Berlin: Cornelsen, S. 8–20.

Barzel, Bärbel (2008): Selbstlernen – ein Weg zu umfassenden mathematischen Kompetenzen. In: *Schule NRW* (11), S. 550–552.

Barzel, Bärbel (2009 (in Druck)): Eine Lernwerkstatt zur Untersuchung ganzrationaler Funktionen mit Computeralgebra. Mathematikunterricht zwischen Konstruktion und Instruktion. Hildesheim: Franzbecker.

Barzel, Bärbel (2009): Mathematik mit allen Sinnen erfahren - auch in der Sekundarstufe! In: Timo Leuders, Lisa Hefendehl-Hebeker und Hans-Georg Weigand (Hg.): Mathemagische Momente. Berlin: Cornelsen.

Barzel, Bärbel (2009): Schreiben in „Rechnersprache"? Zum Problem des Aufschreibens beim Rechnereinsatz. In: Bärbel Barzel und Carola Ehret (Hg.): Mathematische Sprache entwickeln. Mathematik lehren (156). Seelze: Friedrich, S. 58–60.

Barzel, Bärbel; Amelung, Udo Berntzen Detlef (Hg.) (2002): Neues Lernen - Neue Medien. Blick über den Tellerrand, Tagungsdokumentation der Pfingsttagung 2001, Münster. Münster: ZKL (ZKL-Texte Nr. 19).

Barzel, Bärbel; Berlin, Tatjana; Bertalan, Dagmar; Fischer, Astrid (Hg.) (2008): Entwicklung des algebraischen Denkens. Festschrift zum 60. Geburtstag von Lisa Hefendehl-Hebeker. Hildesheim: Franzbecker.

Barzel, Bärbel; Böhm, Josef (Hg.) (2002): Mathematikunterricht anders. Offenes Lernen mit neuen Medien. Stuttgart: Klett.

Barzel, Bärbel; Büchter, Andreas; Hußmann, Stephan; Leuders, Timo (2004): Unterrichtsentwicklung mit standardorientierten Lehrplänen und Lernstandsmessungen. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, S. 69–76.

Barzel, Bärbel; Büchter, Andreas; Leuders, Timo: Mathematik-Methodik. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Barzel, Bärbel; Drijvers, Paul (1993): Lineare Algebra – Matrizen mit Derive. In: *Mathematik betrifft uns* (5).

Barzel, Bärbel; Drijvers, Paul; Maschietto, M.; Trouche, Luc (2005): Tools and technologies in mathematical didactics. In: Marianna Bosch (Hg.): Proceedings CERME4 conference february 2005.

Barzel, Bärbel; Ehret, Carola (Hg.) (2009): Mathematische Sprache entwickeln. *Mathematik lehren* (156). Seelze: Friedrich.

Barzel, Bärbel; Ehret, Carola (2009): Mathematische Sprache entwickeln. In: Bärbel Barzel und Carola Ehret (Hg.): Mathematische Sprache entwickeln. Mathematik lehren (156). Seelze: Friedrich, S. 4–9.

Barzel, Bärbel; Eschweiler, Marcel (2006): Negative Zahlen – positiv erleben! Eine Lernwerkstatt zur Einführung der negativen Zahlen. In: *Praxis der Mathematik* (11).

Barzel, Bärbel; Eschweiler, Marcel; Malle, Günther (2007): Lernwerkstatt Negative Zahlen. Mathewelt (142).

Barzel, Bärbel; Fröhlich, Ines; Im Stachniss-Carp, Sibylle (2003): Das Abc der ganzrationalen Funktionen – Eine Lernwerkstatt im 11. Jahrgang. Lehrerheft. Stuttgart: Klett.

Barzel, Bärbel; Fröhlich, Ines; Stachniss-Carp, Sibylle (2003): Das Abc der ganzrationalen Funktionen – Eine Lernwerkstatt im 11. Jahrgang. Schülerheft. Stuttgart: Klett.

Barzel, Bärbel; Ganter, Sandra (erscheint in 2010): Experimentell zum Funktionsbegriff. In: *Praxis der Mathematik*.

Barzel, Bärbel; Haftendorn, Dörte; Lehmann, Eberhard; Röttger, Alheide; Saint-George, Guido von; Weller, Hubert (2000): Open space. In: Wilfried Herget, Hans-Georg Weigand und Thomas Weth (Hg.): Standardthemen des Mathematikunterrichts in moderner Sicht. Bericht über die 17. Arbeitstagung des Arbeitskreises in der GDM, September 1999in Wolfenbüttel. Hildesheim: Franzbecker.

Barzel, Bärbel; Haug, Reinhold; Häger, Kirsten; Rabstein, Andreas (2008): Lernwerkstatt Körper. Mathewelt. In: *Mathematik lehren* (144).

Barzel, Bärbel; Hefendehl-Hebeker, Lisa (2006): Irre oder irrationale Zahlen. Ein Stationenzirkel zum Einstieg. In: *Praxis der Mathematik* 48 (11).

Barzel, Bärbel; Herget, Wilfried (2005): Rezension zu : Büchter/ Leuders: Mathematikaufgaben selbst entwicklen. In: *Mathematik lehren* (131), S. 62.

Barzel, Bärbel; Herget, Wilfried (Hg.) (2006): Terme. Mathematik Lehren 134. Seelze: Friedrich.

Barzel, Bärbel; Heugl, H.; Furukawa, A. (1997): The Influence of Computer Algebra in the Teaching and Learning of Mathematics. In: J. Monoghan J. Berry, M. Kronfellner und B. Kutzler (Hg.): The State of Computer Algebra in Mathematics Education: Chartwell Bratt, S. 32–51.

Barzel, Bärbel; Heugl, H.; Rothery, A.; Sato, T. (1997): Calculus Example. In: J. Monoghan J. Berry, M. Kronfellner und B. Kutzler (Hg.): The State of Computer Algebra in Mathematics Education: Chartwell Bratt, S. 52–60.

Barzel, Bärbel; Hußmann, Stephan (2006): Denken in Funktionen zwischen Graph, Term und Tabelle – Rechnereinsatz auf neuen Wegen. In: Andreas Büchter, Hans Humenberger und Hans-Wolfgang Henn (Hg.): Realitätsnaher Mathematikunterricht. Vom Fach aus und für die Praxis ; Festschrift für Hans-Wolfgang Henn zum 60. Geburtstag. Hildesheim: Franzbecker, S. 158–169.

Barzel, Bärbel; Hußmann, Stephan (2008): Rechtecke im Einheitsquadrat – Experimente auf verschiedenen Darstellungsebenen. In: *Mathematik lehren* (146), S. 14–17.

Barzel, Bärbel; Hußmann, Stephan (2008): Schlüssel zu Variable, Term und Formel. In: Bärbel Barzel, Tatjana Berlin, Dagmar Bertalan und Astrid Fischer (Hg.): Entwicklung des algebraischen Denkens. Festschrift zum 60. Geburtstag von Lisa Hefendehl-Hebeker. Hildesheim: Franzbecker, S. 6–17.

Barzel, Bärbel; Hußmann, Stephan; Leuders, Timo (2004): Bildungsstandards und Kernlehrpläne in Nordrhein-Westfalen und Baden-Württemberg - zwei Wege zur Umsetzung nationaler Empfehlungen. In: *Der Mathematisch-Naturwissenschaftliche Unterricht* 57 (3).

Barzel, Bärbel; Hußmann, Stephan; Leuders, Timo (Hg.) (2005): Computer, Internet & Co im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Barzel, Bärbel; Hußmann, Stephan; Leuders, Timo (2005): Der „Funktionenführerschein" – Wie Schülerinnen und Schüler das „Denken in Funktionen" wiederholen und festigen können. In: *Praxis der Mathematik* (2), S. 20–25.

Barzel, Bärbel; Leinbach, C.; Aspetsberger, K.; Fuchs, K.; Heugl, H.; Mann, G. et al. (1997): The curriculum in a CAS environment. In: J. Monoghan J. Berry, M. Kronfellner und B. Kutzler (Hg.): The State of Computer Algebra in Mathematics Education: Chartwell Bratt, S. S.21-31.

Barzel, Bärbel; Leuders, Timo; Hußmann, Stephan (2003): Selbstständigkeit und Prozessbezogene Kompetenzen im Mathematikunterricht. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, S. 405–412.

Barzel, Bärbel; Leuders, Timo; Hußmann, Stephan (2005): Outcome standards and core curriculum: A new orientation for mathematics teachers in Germany. In: *ZDM* 37 (4).

Barzel, Bärbel; Möller, Regina (2001): About the use of the TI-92 for an Open Learning Approach to power Functions. A Teaching Study. In: *ZDM* (33(1)).

Barzel, Bärbel; Monreal, Denise; Lassek, Katharina (2006): Lernwerkstatt Terme. Mathewelt (134).

Barzel, Bärbel; Pallack, Andreas (Hg.) (2006): T^3 Akzente – Aufgaben mit TI-Nspire CAS. Münster: ZFL.

Barzel, Bärbel; Pallack, Andreas (Hg.) (2007): T^3-Akzente - Aller Anfang ist leicht. Münster: ZFL.

Barzel, Bärbel; Pallack, Andreas; Schlöglhofer, Franz (2007): Bilder analysieren und rekonstruieren. In: Bärbel Barzel und Andreas Pallack (Hg.): T^3-Akzente - Aller Anfang ist leicht. Münster: ZFL, S. 63–70.

Barzel, Bärbel; Saint-George, Guido von (2003): Organisationsformen des Lernens mit neuen Medien. In: Timo Leuders (Hg.): Mathematikdidaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornelsen Scriptor, S. 234–245.

Barzel, Bärbel; Weigand, Hans-Georg (Hg.) (2008): Medien vernetzen. Mathematik Lehren 146. Seelze: Friedrich.

Bender, Peter et al (Hg.) (2003): Lehr-und Lernprogramme Mathematikunterricht. Bericht über die 20 Arbeitstagung Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ GDM 2002 Soest. Hildesheim: Franzbecker.

Berry, J. Monoghan J.; Kronfellner, M.; Kutzler, B. (Hg.) (1997): The State of Computer Algebra in Mathematics Education: Chartwell Bratt.

Bescherer, Christine (2005): Mit WebQuests im Internet recherchieren. In: Bärbel Barzel, Stephan Hußmann und Timo Leuders (Hg.): Computer, Internet & Co im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Scriptor, S. 107–116.

Bishop, A. J.; Clements, M. A.; Keitel, C.; Kilpatrick, J.; Leung, F. K. S. (Hg.) (2003): Second International Handbook of Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bock, D. de; Isoda, M.; Garcia Cruz, J. A.; Gagatsis, A.; Simmt, E. (Hg.) (2004): Proceedings of ICME-10 Topic Study Group 2. New developments and trends in secondary mathematics education.

Böhm, Josef (Hg.) (1992): Teaching Mathematics with Derive: Chartwell-Bratt.

Borovcnik, Manfred; Kautschitsch, Hermann (Hg.) (2002): Technology in Mathematics Teaching. Proceedings of ICTMT 5 in Klagenfurt 2001. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik. Vienna.

Borromeo-Ferri, Rita (2002): Erste Ergebnisse einer empirischen Studie zu mathematischen Denkstilen von Schülerinnen und Schülern der 9. und 10. Klasse. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, S. 123–126.

Bosch, Marianna (Hg.) (2005): Proceedings CERME4 conference february 2005.

Bruder, Regina (2006): Taschencomputer in Klasse 11. Portfolioevaluation eines Modellprojektes in Hessen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. GDM-Tagung Osnabrück. Online verfügbar unter http://www.math-learning.com/files/pub_GDM06_TRsektion_bruder.pdf, zuletzt geprüft am 13.09.2010.

Büchter, Andreas; Humenberger, Hans; Henn, Hans-Wolfgang (Hg.) (2006): Realitätsnaher Mathematikunterricht. Vom Fach aus und für die Praxis ; Festschrift für Hans-Wolfgang Henn zum 60. Geburtstag. Hildesheim: Franzbecker.

Büchter, Andreas; Humenberger, Hans; Hußmann, Stephan; Prediger, Susanne (Hg.) (2006): Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus und für die Praxis. Hildesheim: Franzbecker.

Chick, H. L. et al (Hg.) (2005): Proceedings of the 29th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. PME 29, Melbourne, Australia, July 10–15, 2005. 4 Bände. Melbourne: University of Melbourne, Dep. of Science and Mathematics Education.

Clarkson, Philip et al (Hg.) (2005): MERGA 28 - 2005. Building connections: Theory, research and practice. 2 Bände.

Doorman, Michiel; Boon, Peter; Drijvers, Paul; van Gisbergen, Sjef; Gravemeijer, Koeno; Reed, Helen (2009): Tool Use and Conceptual Development: An Example of a Form-Function- Shift. In: M. Tzekaki, M. Kaldrimidou und H. Sakonidis (Hg.): Proceedings of the 33rd Conference of the Internation Group for the Psychology of Mathematics Education, Bd. 2. Thessaloniki, Greece: PME, S. 449–456.

Drijvers, Paul (1994): The Use of Graphics Calculators and Computer Algebra Systems: Differences and Similarities. In: *International Derive Journal* 1 (1), S. 71–82.

Drijvers, Paul (2003): Learning algebra in a computer algebra environment. Design research on the understanding of the concept of parameter. Utrecht: Freudenthal Instiute.

Drijvers, Paul (Hg.) (2004): Classroom-based research in mathematics education. Overview of doctoral research published by the Freudenthal Institute 2001-2004. Utrecht: Freudenthal Institute.

Drijvers, Paul (2004): Learning algebra in a computer algebra environment. In: Paul Drijvers (Hg.): Classroom-based research in mathematics education. Overview of doctoral research published by the Freudenthal Institute 2001-2004. Utrecht: Freudenthal Institute, S. 83–104.

Drijvers, Paul (2005): Learning Algebra in a Computer Algebra Environment. In: *International Journal for Technology in Mathematics Education* 11 (3), S. 77–89.

Drijvers, Paul; Kieran, Carolyn; Mariotti, Maria-Alessandra (2010): Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. In: Celia Hoyles und Jean-Baptiste Lagrange (Hg.): Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study. New York: Springer Science and Business Media, S. 89–132.

Dunham, Penelope; Hennessy, Sara (2008): Equity and Use of Educational Technology in Mathematics. In: M. Kathleen Heid und Glendon W. Blume (Hg.): Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Syntheses, Cases, and Perspectives. Research Syntheses. 2 Bände. Charlotte, North Carolina: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1), S. 345–418.

Edwards, Michael Todd (2003): Novice Algebra Students May be Ready for CAS - But Are CAS Tools Ready for Novice Algebra Students? In: *The Internation Journal of Computer Algebra in Mathematics Education* 10 (4), S. 265–278.

Elschenbroich, Hans-Jürgen (2003): Ein dynamischer Zugang zu Funktionen und Gleichungen. In: *MNU* 56 (8), S. 454–460.

Elschenbroich, Hans-Jürgen (2005): Mit dynamischer Geometrie argumentieren und beweisen. In: Bärbel Barzel, Stephan Hußmann und Timo Leuders (Hg.): Computer, Internet & Co im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Fachgruppe Computeralgebra der DMV, GAMM und GI (2006): Computeralgebra in Lehre, Ausbildung und Weiterbildung V - Entdecken, üben, prüfen mit Computeralgebra, neue Entwicklungen an Schule und Hochschule. Tagungsband.

Fey, James T. (2003): CAS and Assessment of Mathematical Understanding and Skill: Introduction. In: James T. Fey, Al Cuoco, Carolyn Kieran, Lin McMullin und Rose Mary Zbiek (Hg.): Computer algebra systems in secondary school mathematics education. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, S. 287.

Fuglestad, Anne Berit (2005): Students' choice of tasks and tools in an ICT rich environment. In: Marianna Bosch (Hg.): Proceedings CERME4 conference february 2005.

Garry, Tim (2003): Computing, Conjecturing, and Confirming with a CAS Tool. In: James T. Fey, Al Cuoco, Carolyn Kieran, Lin McMullin und Rose Mary Zbiek (Hg.): Computer algebra systems in secondary school mathematics education. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, S. 137–150.

GDM-Tagung Osnabrück (2006): Beiträge zum Mathematikunterricht. Online verfügbar unter http://www.math-learning.com/, zuletzt geprüft am 15.09.2010.

Grouws, D. (Hg.) (1992): Handbook of research on mathematics research and teaching. New York: MacMillan.

Hefendehl-Hebeker, Lisa (2008): Wege zur Formelsprache – Entwicklung algebraischen Denkens als didaktische Aufgabe. In: *Unikate* (33), S. 66–71.

Heinze, Aiso et al (Hg.) (2004): Beiträge zum Mathematikunterricht 2004. Vorträge. Hildesheim: Franzbecker.

Herget, Wilfried; Lehmann, Eberhard (Hg.) (2002): Neue Materialien für den Mathematikunterricht mit dem TI-83/89/92 in der Sekundarstufe. I - Quadratische Funktionen. Hannover: Schroedel.

Herget, Wilfried; Weigand, Hans-Georg; Weth, Thomas (Hg.) (2000): Standardthemen des Mathematikunterrichts in moderner Sicht. Bericht über die 17. Arbeitstagung des Arbeitskreises in der GDM, September 1999in Wolfenbüttel. Hildesheim: Franzbecker.

Hiebert, J. (1986): Conceptual and procedural mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Hiebert, J.; Carpenter, T. (1992): Learning and teaching with understanding. In: D. Grouws (Hg.): Handbook of research on mathematics research and teaching. New York: MacMillan, S. 65–100.

Höger, Christof (2007): Kann der Einsatz von CAS die Ausbildung am Seminar bereichern? In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 41. GDM Tagung für Didaktik der Mathematik. Hildesheim: Franzbecker, S. 51–54.

Johnsen Høines, Marit et al (Hg.) (2004): Proceedings of the 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. PME 28, Bergen, Norway, July 14–18, 2004. Bergen: Bergen University College.

Kahan, Jeremy A.; Wyberg, Terrence R. (2003): Technology Matters: An Invitation to Generating Functions with CAS. In: James T. Fey, Al Cuoco, Carolyn Kieran, Lin McMullin und Rose Mary Zbiek (Hg.): Computer algebra systems in secondary school mathematics education. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, S. 151–162.

Kajetanowicz, Przemyslaw; Wierzejewski, Jedrzej (2008): Application of computer algebra systems in automatic assessment of math skills. In: *Teaching Mathematics and Computer Science* 6 (2), S. 395–408.

Kayser, Hans-Jürgen (Hg.) (2001): Mathematikunterricht mit Computeralgebrasystemen. Schriftenreihe Schule in NRW Nr. 9035/3. Frechen: Ritterbach Verlag.

Kayser, Hans-Jürgen (2001): Spiegel – ein Projekt Koordinatengeometrie. In: Hans-Jürgen Kayser (Hg.): Mathematikunterricht mit Computeralgebrasystemen. Schriftenreihe Schule in NRW Nr. 9035/3. Frechen: Ritterbach Verlag, S. 40.

Kendal, Margaret; Stacey, Kaye (2002): Teachers in transition: Moving towards CAS-supported classrooms. In: *The International Journal on Mathematics Education (ZDM Mathematics Education)* 34 (5), S. 196–203.

Kieran, Carolyn; Saldanha, Luis (2005): Computer algebra systems (CAS) as a tool for coaxing the emergence of reasoning about equivalence of algebraic expressions. In: H. L. et al Chick (Hg.): Proceedings of the 29th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. PME 29, Melbourne, Australia, July 10–15, 2005, Bd. 3. 4 Bände. Melbourne: University of Melbourne, Dep. of Science and Mathematics Education, S. 193–200.

Ko, Ki Hyoung et al (Hg.) (2007): Enhancing university mathematics. Proceedings of the first KAIST international symposium on teaching. Daejeon, Korea, May 12–16, 2005. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS) (CBMS Issues in Mathematics Education, 14).

Kovács, Zoltán (2007): Blind versus wise use of CAS. In: *Teaching Mathematics and Computer Science* 5 (2), S. 407–417.

Lagrange, Jean-Baptiste (Hg.) (2003): Proceedings of the Third CAME Symposium. Learning in a CAS Environment: Mind-Machine Interaction, Curriculum & Assessment. Reims. Online verfügbar unter www.lonklab.ac.uk/came/events/reims, zuletzt geprüft am 10.07.2008.

Lagrange, Jean-Baptiste (2007): Didactic time, epistemic gain and consistent tool: Taking care of teachers' needs for classroom use of CAS. In: *International Journal for Technology in Mathematics Education* 14 (2), S. 87–94.

Lambert, Anselm (2003): Begriffsbildung im Mathematikunterricht. In: Peter et al Bender (Hg.): Lehr-und Lernprogramme Mathematikunterricht. Bericht über die 20 Arbeitstagung Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ GDM 2002 Soest. Hildesheim: Franzbecker.

Lehmann, Eberhard (2006): Vorbereitungen auf das Zentralabitur 2007 in Berlin. In: Computeralgebra in Lehre, Ausbildung und Weiterbildung V - Entdecken, üben, prüfen mit Computeralgebra, neue Entwicklungen an Schule und Hochschule. Tagungsband. Fachgruppe Computeralgebra der DMV, GAMM und GI, S. 55–64.

Leng, Ng Wee (2003): Developing a Computer Algebra System (CAS) Attitude Scale: A Survey of Pre-service Teachers' Attitudes toward CAS. In: *The Mathematics Educator* 7 (1), S. 96–109.

Leng, Ng Wee; Choo, Kwee Tiow; Soon, Lau Hock; Yi-Huak, Koh; Sun, Yap Yew (2005): Effects of Using a Computer Algebra System (CAS) on Junior College Students’ Attitudes towards CAS and Achievement in Mathematics. In: *International Journal for Technology in Mathematics Education* 12 (2), S. 59–72.

Lester, F. (Hg.) (2007): Second handbook of research on mathematics teaching and learning. Charlotte, NC: Information Age.

Leuders, Timo (Hg.) (2003): Mathematikdidaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Leuders, Timo; Barzel, Bärbel; Hußmann, Stephan (2009): Ergebnisstandards und Kerncurricula: eine neue Orientierung für Mathematiklehrerinnen und -lehrer in Deutschland. In: MNU (Deutscher Verein zur Förderung des mathematisch und naturwissenschaftlcihen Unterrichts) (Hg.): Mathematikunterricht im Aufbruch. 14. Fachleitertagung Mathematik. Unter Mitarbeit von Hans-Jürgen Elschenbroich. Neuss: Klaus Seeberger, S. 33–46.

Leuders, Timo; Hefendehl-Hebeker, Lisa; Weigand, Hans-Georg (Hg.) (2009): Mathemagische Momente. Berlin: Cornelsen.

Malle, Günther (2000): Zwei Aspekte Funktionen: Zuordnung und Kovariation. In: *Mathematik lehren* (103), S. 8–11.

Masalski, William J. et al (Hg.) (2005): Technology-supported mathematics learning environments. Sixty-seventh yearbook. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

McMullin, Lin (2003): Perspectives for Analyzing CAS Potential. Introduction. In: James T. Fey, Al Cuoco, Carolyn Kieran, Lin McMullin und Rose Mary Zbiek (Hg.): Computer algebra systems in secondary school mathematics education. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, S. 7.

McMullin, Lin (2003): Traditional Assessment and Computer Algebra Systems. In: James T. Fey, Al Cuoco, Carolyn Kieran, Lin McMullin und Rose Mary Zbiek (Hg.): Computer algebra systems in secondary school mathematics education. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, S. 329–336.

MNU (Deutscher Verein zur Förderung des mathematisch und naturwissenschaftlcihen Unterrichts) (Hg.) (2009): Mathematikunterricht im Aufbruch. 14. Fachleitertagung Mathematik. Unter Mitarbeit von Hans-Jürgen Elschenbroich. Neuss: Klaus Seeberger.

Neubauer, Norbert (2003): Mathematik mit TKP – Konstruktion von Körpern. In: Günther Schmidt und K-J Mank (Hg.): Tagungsband der 13 Fachleitertagung für Mathematik der MNU 2001, Bd. 2003. MNU (Deutscher Verein zur Förderung des mathematisch und naturwissenschaftlcihen Unterrichts). Wald-Amorbach (64), S. 95–99.

Neuwirth, Erich (2007): Computers Supporting Mathematical Insight. Two Case Studies. In: Ki Hyoung et al Ko (Hg.): Enhancing university mathematics. Proceedings of the first KAIST international symposium on teaching. Daejeon, Korea, May 12–16, 2005. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS) (CBMS Issues in Mathematics Education, 14), S. 57–61.

Noss, Richard; Healy, Lulu; Hoyles, Celia (1997): The construction of mathematical meanings: connecting the visual with the symbolic. In: *Educational Studies in Mathematics* 33 (2), S. 203–233.

Noss, Richard; Hoyles, Celia (Hg.) (1992): Learning mathematics and Logo. Cambridge, MA: MIT Press.

Noss, Richard; Hoyles, Celia; Pozzi, Stefano (1998): Towards a mathematical orientation through computational modelling project. ESRC - End-of-award report.

Oldenburg, Reinhard (2004): Barrieren für die Anwendung von CAS. In: *Praxis der Mathematik in der Schule* 46 (2), S. 69–72.

Oldknow, Adrian (2006): Researching with software - CAS, DGS and Cabri 3D. In: *International Journal for Technology in Mathematics Education* 13 (1), S. 45–49.

Page, Warren (2007): The Influence of Technology on Mathematics Instruction: Concerns and Challenges. In: Ki Hyoung et al Ko (Hg.): Enhancing university mathematics. Proceedings of the first KAIST international symposium on teaching. Daejeon, Korea, May 12–16, 2005. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS) (CBMS Issues in Mathematics Education, 14), S. 97–110.

Pallack, Andreas (2005): Präsentieren im Internet. In: Bärbel Barzel, Stephan Hußmann und Timo Leuders (Hg.): Computer, Internet & Co im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Scriptor, S. 117–127.

Pateman, Neil A. et al (Hg.) (2003): Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA.

Persson, Per-Eskil (2009): Handheld calculators as tools for students\rq learning of algebra. In: *Nordic Studies in Mathematics Education* 14 (2), S. 49–77.

Pierce, Robyn (2005): Algebraic insight underpins the use of CAS for modeling. In: *The Montana Mathematics Enthusiast (TMME)* 2 (2), S. 107–117.

Pierce, Robyn; Herbert, Sandra; Giri, Jason (2004): CAS: Student Engagement requires unambiguous Advantages. In: Ian et al Putt (Hg.): Mathematics education for the third millennium: Towards 2010. MERGA 27, Bd. 2, S. 462–469.

Pierce, Robyn; Stacey, Kaye (2001): Observations on Students' Responses to Learning in a CAS Environment. In: *Mathematics Education Research Journal* 13 (1), S. 28–46.

Pierce, Robyn; Stacey, Kaye (2001): Reflections on the changing pedagogical use of computer algebra systems: assistance for doing or learning mathematics? In: *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching* 20 (2), S. 143–161.

Pierce, Robyn; Stacey, Kaye (2002): Monitoring effective use of computer algebra systems. In: Bill Barton, K. C. Irwin, M. Pfannkuch und M. O. J. Thomas (Hg.): Mathematics education in the South Pacific. Proceedings of the 25th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Auckland. 2 Bände. Sydney: MERGA, S. 575–582.

Pierce, Robyn; Stacey, Kaye (2004): A framework for monitoring progress and planning teaching towards the effective use of computer algebra systems. In: *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 9 (1), S. 59–93.

Pierce, Robyn; Stacey, Kaye (2004): Learning to Use CAS: Voices from a Classroom. In: Marit et al Johnsen Høines (Hg.): Proceedings of the 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. PME 28, Bergen, Norway, July 14–18, 2004, Bd. 4. Bergen: Bergen University College, S. 25–32.

Pierce, Robyn; Stacey, Kaye (2004): Monitoring progress in algebra in a CAS active context: Symbol sense, algebraic insight and algebraic expectation. In: *International Journal for Technology in Mathematics Education* 11 (1), S. 3–11.

Pierce, Robyn; Stacey, Kaye (2008): Using pedagogical maps to show the opportunities afforded by CAS for improving the teaching of mathematics. In: *Australian Senior Mathematics Journal* 22 (1), S. 6–12.

Pierce, Robyn; Stacey, Kaye; Ball, Lynda (2005): Mathematics from still and moving images. In: *Australian Mathematics Teacher* 61 (3), S. 26–31.

Pierce, Robyn; Stacey, Kaye; Wander, Roger (2010): Examining the didactic contract when handheld technology is permitted in the mathematics classroom. In: *The International Journal on Mathematics Education (ZDM Mathematics Education)* 42 (7), S. 683–695.

Pintér, Klára; Karsai, János (2004): With oder Without - With and Without Computing & Problem Solving. In: Csaba Sárvári (Hg.): Computer algebra systems and dynamic geometry systems in mathematics teaching. Pécs: University of Pécs, S. 1–11.

Putt, Ian et al (Hg.) (2004): Mathematics education for the third millennium: Towards 2010. MERGA 27.

Ruthven, Kenneth (2002): Instrumenting Mathematical Activity: Reflections on Key Studies of the Educational Use of Computer Algebra Systems. In: *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7 (3), S. 275–291.

Ruthven, Kenneth (2006): Building practical theories for technology integration. In: *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia* 29 (2), S. 97–121.

Ruthven, Kenneth (2006): Embedding new technologies in complex ongoing practices of school mathematics education. In: *International Journal for Technology in Mathematics Education* 13 (4), S. 161–167.

Ruthven, Kenneth; Deaney, Rosemary; Hennessy, Sara (2009): Using graphing software to teach about algebraic forms: a study of technology-supported practice in secondary-school mathematics. In: *Educational Studies in Mathematics* 71 (3), S. 279–297.

Ruthven, Kenneth; Hennessy, Sara (2002): A practitioner model of the use of computer-based tools and resources to support mathematics teaching and learning. In: *Educational Studies in Mathematics* 49 (1), S. 47–88.

Ruthven, Kenneth; Hennessy, Sara (2003): Successful ICT use in secondary mathematics - a teacher perspective. In: *Micromath* 19 (2), S. 20–24.

Sangwin, Chris; Naismith, Laura (2008): Implementing computer algebra enabled questions for the assessment and learning of mathematics. In: *International Journal for Technology in Mathematics Education* 15 (1), S. 3–18.

Sárvári, Csaba (Hg.) (2004): Computer algebra systems and dynamic geometry systems in mathematics teaching. Pécs: University of Pécs.

Sárvári, Csaba (2005): CAS integration into learning environment. In: *The International Journal on Mathematics Education (ZDM Mathematics Education)* 37 (5), S. 418–423.

Schmidt, Günther; Mank, K. (Hg.) (2001): Mathematikunterricht im Aufbruch. Tagungsband der 13. MNU-Fachleitertagung für Mathematik, Wald-Amorbach 2001.

Schmidt, Günther; Mank, K-J (Hg.) (2003): Tagungsband der 13 Fachleitertagung für Mathematik der MNU 2001. MNU (Deutscher Verein zur Förderung des mathematisch und naturwissenschaftlcihen Unterrichts). Wald-Amorbach (64).

Schoen, Harold L. (Hg.) (2003): Teaching mathematics through problem solving. Grades 6-12. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Schultz, James E. (2003): To CAS or Not to CAS? In: James T. Fey, Al Cuoco, Carolyn Kieran, Lin McMullin und Rose Mary Zbiek (Hg.): Computer algebra systems in secondary school mathematics education. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, S. 163–171.

Schwartz, J.; Yerushalmy, Michal; Wilson, B. (Hg.) (1993): The geometric supposer: What is it a case of? Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Stacey, Kaye; Chick, Helen; Kendal, Margaret (Hg.) (2004): The future of the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI study. Boston: Kluwer Acad. Publ. (New ICMI studies series, 8). Online verfügbar unter
http://www.loc.gov/catdir/enhancements/fy0821/2004053818-d.html /
http://www.loc.gov/catdir/enhancements/fy0821/2004053818-t.html /
http://www.zentralblatt-math.org/zmath/en/search/?an=1112.00011 /
http://www.gbv.de/dms/bowker/toc/9781402081309.pdf.

Stewart, Sepideh (2005): Concerns relating to the CAS use at university level. In: Philip et al Clarkson (Hg.): MERGA 28 - 2005. Building connections: Theory, research and practice. 2 Bände, S. 704–711.

Tall, David; Smith, David; Piez, Cynthia (2008): Technology and Calculus. In: M. Kathleen Heid und Glendon W. Blume (Hg.): Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Syntheses, Cases, and Perspectives. Research Syntheses. 2 Bände. Charlotte, North Carolina: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1), S. 207–258.

Townend, Stewart (2004): Review of Paul Drijvers' PhD thesis: learning algebra in a computer environment. In: *International Journal for Technology in Mathematics Education* 11 (3), S. 111–113.

Trouche, Luc; Drijvers, Paul (2010): Handheld technology for mathematics education: flashback into the future. In: *The International Journal on Mathematics Education (ZDM Mathematics Education)* 42 (7), S. 667–681.

Tzekaki, M.; Kaldrimidou, M.; Sakonidis, H. (Hg.) (2009): Proceedings of the 33rd Conference of the Internation Group for the Psychology of Mathematics Education. Thessaloniki, Greece: PME.

Vollrath, Hans-Joachim (1989): Funktionales Denken. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 10, S. 3–37.

Vollrath, Hans-Joachim (2001): Grundlagen des Mathematuikunterrichts in der Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum.

Wagner, Anke (Hg.) (2008): Offene Lernangebote und Lernarrangements in der Hauptschule. Tagungsband Hauptschultag an der PH Ludwigsburg, Juni 2008. Berlin: Cornelsen.

Wang Jianpan et al. (Hg.) (2004): Trends and challenges in mathematics education. Shanghai: East China Normal University Press.

Weigand, Hans-Georg (1999): Eine explorative Studie zum computergestützten Arbeiten mit Funktionen. In: *Journal für Mathematik-Didaktik (JMD)* 20 (1), S. 28–54.

Weinert, F. E. (1999): Konzepte der Kompetenz. Paris: OECD.

Weinert, F. E. (Hg.) (2001): Leistungsmessungen in Schulen. Weinheim und Basel: Beltz.

Winter, Heinrich (1996): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: *GDM-Mitteilungen* (61), S. 37–46.

Wurnig, Otto (2004): Neue Modelle zur Leistungsbeurteilung im CAS-integrierten Mathematikunterricht. Erfahrungen aus den CAS-Projekten. In: Aiso et al Heinze (Hg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2004. Vorträge. Hildesheim: Franzbecker, S. 617–620.

Yerushalmy, Michal (2005): Challenging known transitions: Learning and teaching algebra with technology. In: *For the Learning of Mathematics* 25 (3), S. 37–42.

Zbiek, R.; Heid, K.; Blume, G.; Dick, Th (2007): Research on Technology Mathematics Education – A Perspective of Constructs. In: F. Lester (Hg.): Second handbook of research on mathematics teaching and learning. Charlotte, NC: Information Age., S. 1169–1207.

Zbiek, Rose Mary (2003): Using technology to foster mathematical meaning through problem solving. In: Harold L. Schoen (Hg.): Teaching mathematics through problem solving. Grades 6-12. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), S. 93–104.

Zbiek, Rose Mary (2005): Using technology to show prospective teachers the "power of many points". In: William J. et al Masalski (Hg.): Technology-supported mathematics learning environments. Sixty-seventh yearbook. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, S. 291–301.

Internetquellen

http://madipedia.de/images/4/40/Stellungnahme-GDM-MNU-2010.pdf, Stand: 06.01.2011

www.fachgruppe-computeralgebra.de, Stand: 05.01.2011